



https://www.youtube.com/watch?v=OR36jrx_L44



Jake Barnett, 13 year

When her son Jacob was 2, Kristine Barnett was told he might never speak due to severe autism.

At age two, Jake Barnett was diagnosed with autism and his future was unclear. Now at age 13, Jake is a college sophomore and a math and science prodigy. Jake says his autism is key to his success.

Today, (or January 2012)

1:35 – 3:20



Elever med särskild begåvning i matematik

Om

Elever med särskild begåvning

Med fokus på matematik

elisabet.mellroth@kau.se

Hör gärna av er med frågor om ni vill!



Dagens schema

- 15:15 – 16:00 *Föreläsning*
- 16:15 – 16:45 *Workshop presentation*
- Glidande övergång – inga fixa tider ☺*
- 16:45 – 17:00 *Summering och frågor*





Skollagen kap 3

- Alla barn och elever ska ges den ledning och stimulans som de behöver i sitt lärande och sin personliga utveckling ...

– Skolan måste då vara tillgänglig för alla

- Ingen grupp ska prioriteras mer än en annan



Dagens innehåll

- Särskild begåvning – allmänt
- Särskild Begåvning i matematik
 - att identifiera i elevens arbete – vad/hur eleven visar upp (Sheffield/Krutetskii)
 - Kriterier på innehållet (uppgifterna) för att stödja/stimulera/utmana (Sheffield/Taflin)



Mål

- * Att få en insikt i vad särskild begåvning kan vara.
- * Att få insikt i hur elever med särskild begåvning i matematik kan uppmärksammas och hur uppgifter kan anpassas för dem.
- * Att få ta del av vad forskning påtalar är viktigt i undervisning av särskilt begåvade elever.



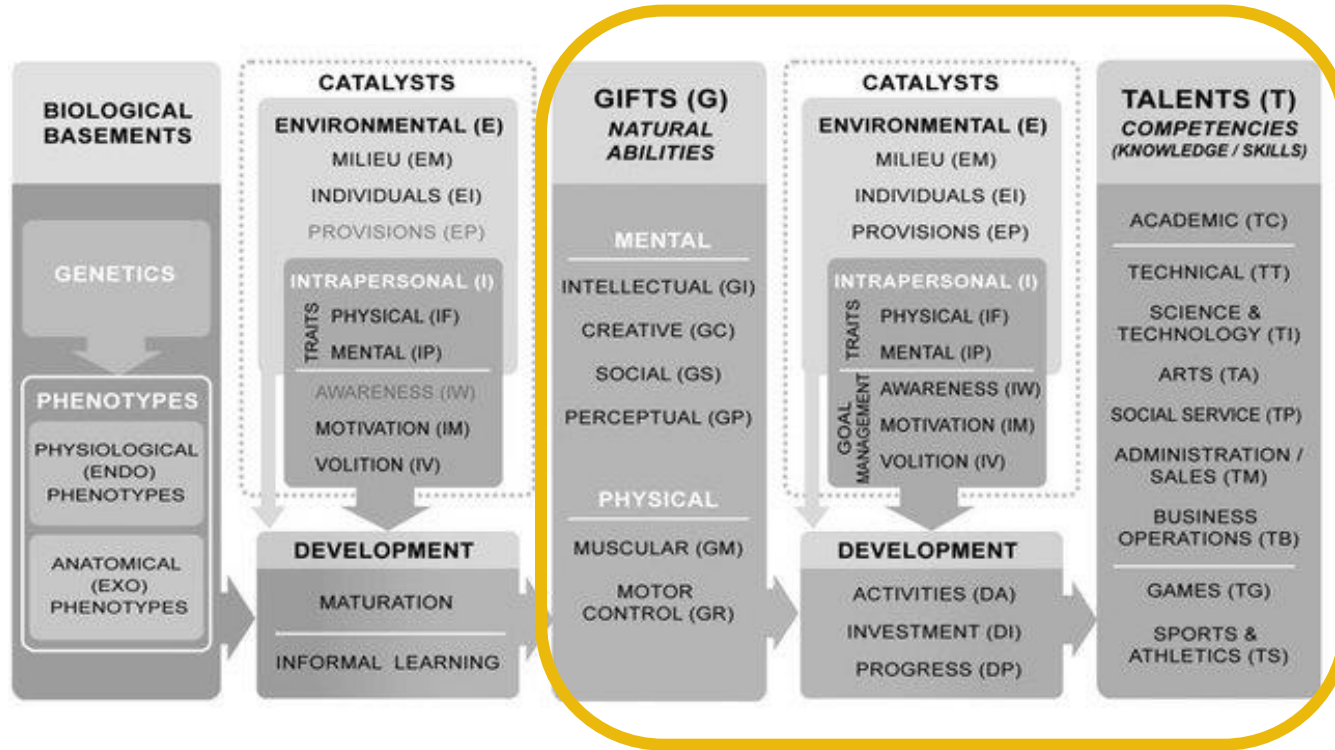
Särskild begåvning – ha potential

- För en avancerad utveckling,
- Att prestera på nivåer mycket högre än förväntat,
 - Fysiskt, musikaliskt, socio emotionellt, matematiskt eller x-ligt,
- Att vara särskilt begåvad inom en domän innebär att du har potential att prestera på mycket högre nivåer än normalt inom den domänen.
- Det betyder inte att du är värd mer än någon annan.
- Det kan innebära att det blir svårt i skolan, både gällande prestationer och sociala relationer.



Gross, U.M., (2004). *Gifted and Talented Education: Professional Development Package for Teachers, Module 1*. GERRIC, University of New South Wales. <https://education.arts.unsw.edu.au/about-us/gerric/resources/pd-package/>



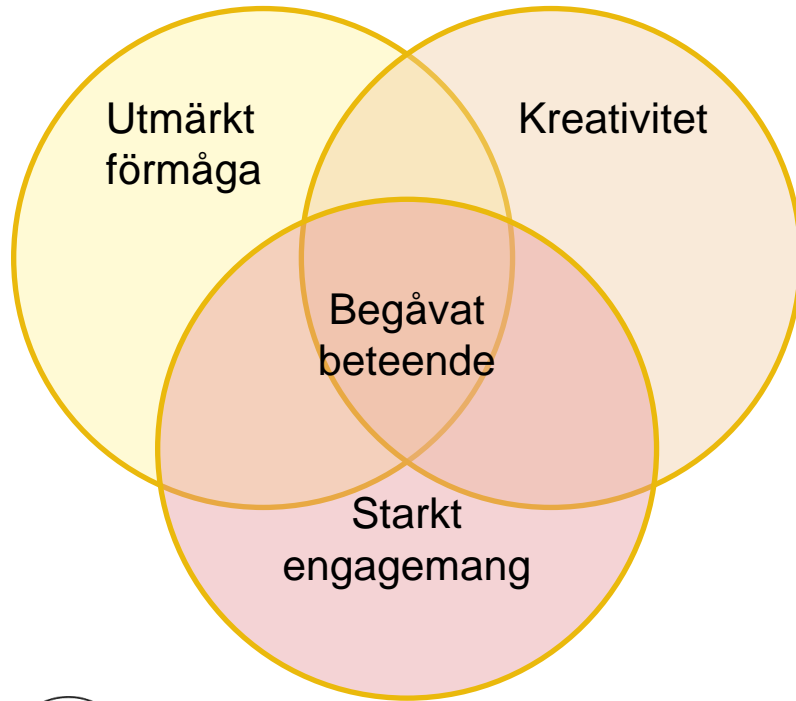


Gagné's Expanded Model of Talent Development (EMTD).

Figure 6 i: Gagné, F. (2013). The DMGT: Changes Within, Beneath, and Beyond. *Talent Development and Excellence* 5(1):5-19



Renzulli



Renzulli, J. & Reis, S. (2021). The three ring conception of giftedness: A change in directions from being gifted to the development of gifted behaviors. I R. J. Sternberg (Red.), *Conceptions of giftedness*. (ss. 318 – 335). Palgrave Macmillan.



Sims



(Sims 2021, s. 35)

Sims, C. (2021). *Särskild begåvning i praktik och forskning*. Studentlitteratur



Kognitiva karaktärstika

Varje elev är en individ och unik.

Allt hittas inte hos varje särskilt begåvad elev.



De särskilt begåvade eleverna

De som plötsligt ”glimmar till”, som blir ”som fångade” av något specifikt (ofta udda) ämne eller idé även om eleven kan verka apatisk vid andra tillfällen.

- Förstår och kan använda abstrakta symboler väldigt tidigt,
- Ställer reflektiva och undersökande frågor,
- Rik vokabulär,
- Absorberas av arbete som intresserar dem,
- Ovanligt snabb inlärningshastighet,
- Ogillar långsamt arbete,
- Välutvecklat minne,
- Resonerar på sätt mer vanligt hos äldre elever,
- Föredrar individuellt arbete.



Gross, U.M.,. (2004). *Gifted and Talented Education: Professional Development Package for Teachers, Module 1*. GERRIC, University of New South Wales. <https://education.arts.unsw.edu.au/about-us/gerric/resources/pd-package/>



Särskilt begåvade jmf Högpresterande

Särskilt begåvade elever:

- Ställer frågor
- Är nyfikna
- Har tokiga idéer
- Sysselsätter sig med andra saker men klarar sig ändå
- Diskuterar frågor och utvecklar
- Visar starka åsikter och synpunkter
- Kan redan
- Föredrar vuxna
- Skapar nytt
- Tycker om att lära
- Bearbetar information
- Njuter av komplexitet
- Är mycket självkritiska
- Tänker abstrakt

Högpresterande elever:

- Kan svaret
- Är intresserade
- Har goda idéer
- Arbetar hårt
- Besvarar frågor
- Lyssnar med intresse
- Lär sig snabbt
- Trivs med jämnåriga kamrater
- Kopierar
- Tycker om skolan
- Tar emot information
- Föredrar en steg för steg progression
- Är nöjda med sin inläring
- Förstår idéer



Fallbeskrivning - Grundskola

Om grundskolan vid 20 års ålder:

...alltid haft extremt lätt för mig med teoretiska skolämnena (då speciellt matematik, naturvetenskap och språk) och aldrig i grundskolan fått någon utmaning i dessa ämnen...

Vad lärarna inte förstod var att jag redan hade löst mattetalen typ 30 gånger på olika sätt, redan kunde alla busenkla glosor och redan hade skrivit TVÅ noveller medan de andra i klassen precis kommit på ämne att skriva om. Jag var otroligt uttråkad på lektionerna och kunde inte på något sätt förstå vad jag egentligen gjorde där, jag utvecklades ju ingenting och lärde mig aldrig något nytt! ...

Jag ville heller inte gärna tala om att jag var färdig med allt och detta av rädsla för att få en "plugghäststämpel" av dem andra i klassen. Ibland låtsades jag till och med att jobba med det ordinarie skolarbetet bara för att få vara som alla andra och inte sticka ut på något sätt. Jag ville vara som dem och skämdes till och med för mina kunskaper!



Fallbeskrivning - Gymnasiet

Mawlid börjar på naturvetenskapligt program. Efter knappt en månad är han klar med den första matematikkursen, då har han inte lärt sig något nytt. Hans matematiklärare vill att rektorn ska ta ett beslut om hur Mawlids matematikundervisning ska gå till och motsätter sig därför att skolans speciallärare ger Mawlid tillgång och undervisning i nästa matematikkurs. På sin fritid har Mawlid på egen hand läst in matematik på universitetsnivå som motsvarar första året på till exempel en civilingenjörsutbildning.

Fysik är även det ett ämne som Mawlid är djupt intresserad av. Efter fysikprov är det mer regel än undantag att Mawlid går till fysikläraren för att diskutera en, enligt Mawlid, felaktigt formulerad fråga. Oftast får han då svaret att hans frågor inte ligger på en gymnasienivå och att läraren måste fokusera på att hjälpa de som har svårt, lärarensäger att hans tid inte räcker till för att svara på Mawlids frågor. Efter ett sådant samtal är Mawlid ofta väldigt arg.

I slutet av gymnasiet har Mawlid fått viss hjälp med att formellt studera universitetsmatematik. Han har dock inte gjort några tentor, av rädsla för att resultatet inte ska bli VG. Han går ut gymnasiet med 22,5 i meritvärde och en hel del frustration.



Tips om korta filmer på UR-play

Jönköping 25 januari 2024

Särskilt begåvad – inkludering, stöttning och differentiering

<https://urplay.se/program/236563-larande-for-sarskild-begavning-sarskilt-begavad-inkludering-stottning-och-differentiering>

<https://urplay.se/sok?query=s%C3%A4rskild%20beg%C3%A5vning>

Från UR Samtiden – Begåvning – tillgång eller belastning? 11 november 2014

”Särbegåvad och särbehandlad” en presentation av Alexander Kidelius, student. (12 min). <https://urskola.se/Produkter/188333-UR-Samtiden-Begavning-tillgang-eller-belastning-Sarbegavad-och-sarbehandlad>

”Kallad dum tills man tror på det” en presentation av Ken Engström, student. (22 min).

<https://urskola.se/Produkter/188332-UR-Samtiden-Begavning-tillgang-eller-belastning-Kallad-dum-tills-man-tror-pa-det>



~~10 000 timmar~~



Från föreläsning av Torkel Klingberg, 5 sept 2018



KARLSTAD.SE

Genetiskt



Inlärningshastighet



Foto: Magda Ehlers *pexels.com*

Interventioner



Träningstid



Foto: Jordan Benton *pexels.com*

X



Kompetensnivå

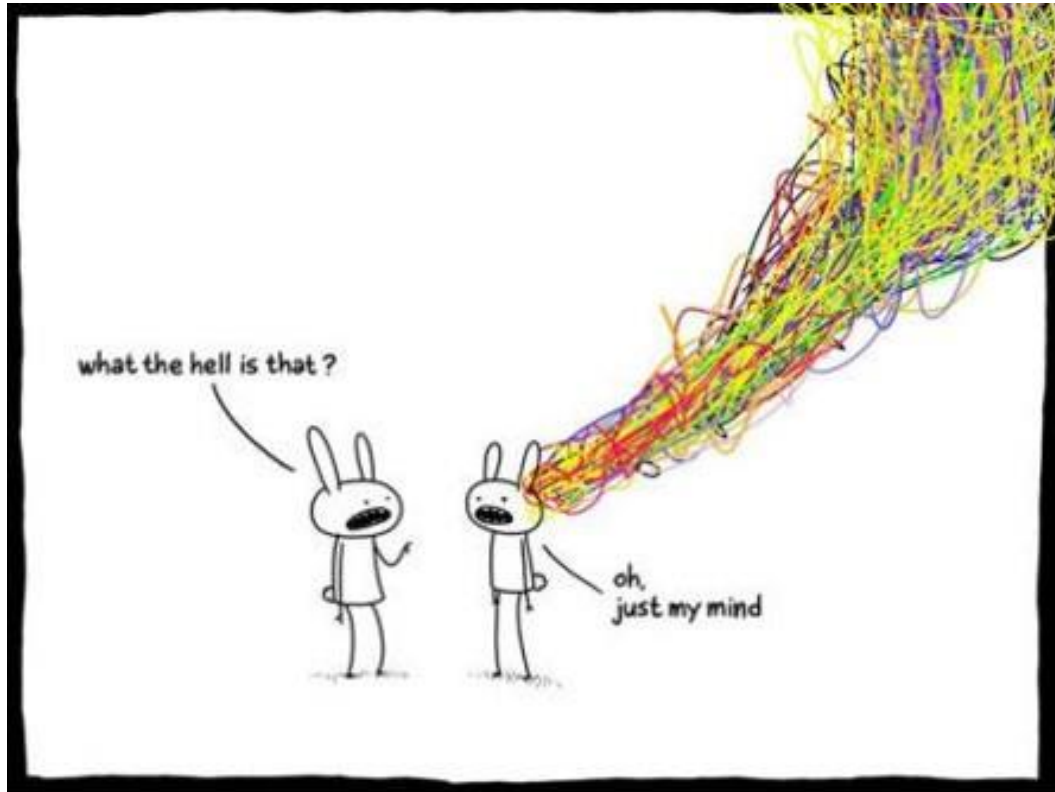


Foto: The lazy artist gallery
pexels.com



Vilka är de?





Identifikationslistor?

Förskola

Grundskola

Gymnasiet



KARLSTAD.SE

Förskola

Appendiks 1

Nomineringsskjema for stort potensial blant barnehagebarn (4-6 års alder)

Barnets navn: _____ Alder: _____

Dato for utfylling av skjema: _____

Hvem fyller ut skjemaet (navn): _____

Både foreldre og pedagoger kan bruke dette skjemaet.



APPENDIKS 1
Sammenlignet med andre barn på samme alder, hvilke egenskaper har barnet?

No.	Karakteristika	Stemmer ikke	Stemmer litt	Stemmer en god del	Stemmer fullstendig	Vet ikke
1	Barnet kan allerede skrive og lese.					
2	Barnet foretrekker yngre eller eldre barn som venner fremfor jevnaldrende.					
3	Barnet viser tidlig interesse for geografi, universet og naturen eller andre temaer.					
4	Barnet har evne til å lage interessante og uvanlige figurer og mønstre med forskjellig materiale, som for eksempel med klosser, kitt eller leire, eller med fargeblyanter.					
5	Barnet kan legge puslespill som er ment for eldre barn.					
6	Barnet forstår abstrakte begreper som for eksempel betydningen av «død» eller betydningen av begrepet «tid».					
7	Barnet lærer nye ferdigheter uten mye trening og repetisjon.					
8	Barnet har mange spørsmål og mange kommentarer til voksne.					
9	Barnet er opptatt av rettferdighet (reagerer sterkt mot urettferdigheter).					
10	Barnet er sensitiv og viser medfølelse med andre.					

Hvis barnet viser mer enn 6 av karakteristikaene, kan det sammen med andre kartleggingsinstrumenter være et tegn på at barnet har høyt potensial og trenger stimulering og tilpasset læringsmiljø.

Denne skalaen er utviklet for Skoleklar-prosjektet, Læringsmiljøsentret, Stavanger.



Grundskola

Checklista / elev

- 0 1 2 Jag kan bli helt uppslukad om jag är intresserad av något.
- 0 1 2 Jag lär mig snabbt.
- 0 1 2 Jag har ett stort ordförråd.
- 0 1 2 Jag är bra på att tänka logiskt.
- 0 1 2 Jag tycker det är viktigt med ärlighet och rättvisa.
- 0 1 2 Jag tycker att det är spännande att undersöka något och få lära mig nya saker.
- 0 1 2 Jag är extremt nyfiken och vet mycket om många saker.
- 0 1 2 Jag är bra på att konstruera och föreställa mig saker.
- 0 1 2 Jag uppfattar saker snabbt.
- 0 1 2 Jag är bra på att fundera, resonera och reflektera.
- 0 1 2 Jag vet att jag är klok och duktig.
- 0 1 2 Jag har lätt att lära mig nya saker.
- 0 1 2 Jag har ett riktigt bra minne.
- 0 1 2 Jag är bra på matematik.
- 0 1 2 Jag är bra på avancerade spel t.ex. på dator
- 0 1 2 Jag håller fast vid mina intressen.
- 0 1 2 Jag är ivrigt observerande
- 0 1 2 Jag har mycket känslor och är känslig.
- 0 1 2 Jag gillar inte rutinarbete på lektionerna.
- 0 1 2 Jag föredrar att vara tillsammans med kompisar som har samma intressen som jag.
- 0 1 2 Jag tycker att jag är annorlunda än andra i min ålder.
- 0 1 2 Jag är bra på att tänka strategiskt.
- 0 1 2 Jag är mycket humoristisk.
- 0 1 2 Jag tänker annorlunda än andra i min ålder.
- 0 1 2 Jag gillar projektarbete i skolan.

Checklista / förälder

- 0 1 2 Har ett stort ordförråd
- 0 1 2 Uppfattar saker snabbt
- 0 1 2 Har riktigt bra minne
- 0 1 2 Kan bli helt uppslukad om något är intressant
- 0 1 2 Tycker det är viktigt med ärlighet och rättvisa
- 0 1 2 Är bra på logiskt tänkande
- 0 1 2 Lär sig snabbt
- 0 1 2 Är bra på att förstå komplicerade sammanhang
- 0 1 2 Älskade högläsning som liten
- 0 1 2 Är bra på att fundera, resonera och reflektera
- 0 1 2 Barnet kunde tänka abstrakt innan det började skolan
- 0 1 2 Har mycket känslor och är känslig
- 0 1 2 Är ivrigt observerande
- 0 1 2 Är extremt nyfiken och vet mycket om många saker
- 0 1 2 Ger ofta, för sin ålder, väldigt mogna omdömen/värderingar.
- 0 1 2 Är bra på att konstruera och föreställa sig saker.
- 0 1 2 Barnets sinne för humor utvecklades tidigt
- 0 1 2 Barnet framförde, för sin ålder, mogna åsikter och värderingar innan det började skolan
- 0 1 2 Är bra på matematik
- 0 1 2 Barnet kunde förstå ironi innan det började skolan
- 0 1 2 Språkutvecklingen startade mycket tidigt
- 0 1 2 Barnet kunde alfabetet innan det började skolan
- 0 1 2 Föredrar att vara tillsammans med kompisar med samma intressen
- 0 1 2 Barnet använde främmande ord innan det började skolan
- 0 1 2 Är perfektionistisk

Checklista / lärare

- 0 1 2 Uppfattar snabbt
- 0 1 2 Har riktigt bra minne
- 0 1 2 Lär sig snabbt
- 0 1 2 Har stort ordförråd
- 0 1 2 Är bra på logiskt tänkande
- 0 1 2 Är bra på att fundera, resonera och reflektera
- 0 1 2 Kan bli helt uppslukad när det är något som intresserar
- 0 1 2 Är bra på matematik
- 0 1 2 Håller fast vid sina intressen
- 0 1 2 Har mycket känslor och är känslig.
- 0 1 2 Tycker det är viktigt med ärlighet och rättvisa
- 0 1 2 Är bra på att förstå komplicerade sammanhang
- 0 1 2 Kan koncentrera sig under lång tid
- 0 1 2 Är extremt nyfiken och vet mycket om många saker
- 0 1 2 Är extremt duktig på ett eller flera ämnesområden, jämfört med vad man kan förvänta sig av elever i samma ålder
- 0 1 2 Är bra på att konstruera och föreställa sig saker
- 0 1 2 Är ivrigt observerande
- 0 1 2 Är bra på att tänka strategiskt
- 0 1 2 Är utan tvekan en av de duktigaste i klassen i ett eller flera ämnen
- 0 1 2 Ger ofta, för sin ålder, väldigt mogna omdömen/värderingar
- 0 1 2 Är duktig på att jobba målinriktat för att hitta lösningar
- 0 1 2 Tycker om projektarbete i skolan
- 0 1 2 Har goda arbetsvanor
- 0 1 2 Är väldigt intresserad av skolarbete
- 0 1 2 Är väldigt duktig på att hantera stora mängder information



Gymnasiet

Above level testing?

Eller?



KARLSTAD.SE



Men ärligt!

**De särskilt begåvade,
de klarar väl sig själva
i skolan?**

Eller?



Foto: Julia M Cameron pexels.com



Nej det gör de inte!

- Det är en myt
- Alla elever behöver ledning för att utvecklas i kunskap.
- Vilka risker finns?



Foto: lalesh aldarwish pexels.com



Utan stöd och stimulans till barn med särskild begåvning finns risken att:

- de inte kan utveckla hela sin förmåga. Vilket de har rätt till enligt läroplanen.
- de blir understimulerade och förstör för resten av klassen.
- de aldrig får någon studieförmåga. – Vilket gör att de inte har något verktyg att ta till när studierna blir svårare. (Stutz, M. & Stamm, M. 2006)

Svensk forskning visar att en majoritet (92%) av särbegåvade elever i svenska skolan hade betydande psykosociala problem (Persson, 2010 i Persson, 2014).

Orsak: den fattiga pedagogiska miljön samt brist på förståelse både från skola och hem.



Persson, R. S. (2014). Särbegåvning: ett differentierat fenomen med sociala konsekvenser. *Socialmedicinsk tidskrift*, 91(2), 129-138. <http://www.socialmedicinsktidskrift.se/index.php/smt/article/view/1092/887>

Stutz, M., & Stamm, M. (2006). *Proposal for a Study on the Early Career Development of Precocious Readers and Mathematicians*. http://perso.unifr.ch/margrit.stamm/forschung/fo_projekte.php.



Pedagogens roll gällande barn och elever med särskild begåvning?



Foto: cottonbro studio, pexels.com



KARLSTAD.SE

Särskild begåvning i matematik

Inga enhetliga definitioner...

- Vilket medför att det inte finns något “bästa sätt” som alltid fungerar för att identifiera eleverna med matematisk talang.

Dessutom är

- Varje barn unikt,
- Varje skolmiljö unik.



Sheffield (2001) kännetecknen på matematiskt lovande (Mathematical promising)

Enligt Linda Sheffield's modell kan man upptäcka vissa kännetecknen hos en matematikbegåvad elev:

Matematiskt sinne

Matematisk formalisering och generalisering

Matematisk kreativitet

Matematisk nyfikenhet och uthållighet



Matematiskt sinne

- Älskar att utforska mönster och pussel,
- Ser matematik och struktur i olika situationer,
- Känner igen, skapar och utvidgar mönster,
- Organiserar och kategoriserar information,
- Har en djup förståelse för enkla matematiska begrepp, inklusive en välutvecklad taluppfattning (Sheffield, 2003 i Szabo, 2013).



Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem*.
Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.



Matematisk formalisering och generalisering

- Generaliserar strukturen av ett problem, oftast efter endast ett fåtal exempel,
- Använder ett, till problemet, anpassat resonemang,
- Tänker logiskt och symboliskt med hjälp av kvantitativa och rumsliga samband,
- Utvecklar bevis och andra övertygande argument (Sheffield, 2003 i Szabo, 2013).



Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem*. Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.



Matematisk kreativitet

- Bearbetar matematisk information flexibelt
 - växlar från beräkningar till visuella och grafiska representationer,
- Vänder på tankegångar
 - kan växla från direkta till omvända angreppssätt,
- Har genuina metoder för problemlösning
 - löser problem på sitt eget sätt, med hjälp av ovanliga metoder,
- Strävar efter matematisk elegans och tydlighet i sitt resonemang (Sheffield, 2003 i Szabo, 2013).



Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem*. Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.



Matematisk nyfikenhet och uthållighet

- Är nyfiken på matematiska samband och relationer – undrar “varför” och “tänk om”,
- Har energi och uthållighet vid lösning av svåra problem,
- Söker bortom problemets ytliga drag och fortsätter att utforska även efter att det ursprungliga problemet är löst. (Sheffield, 2003 i Szabo, 2013)



Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem*. Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.



Krutetskiis förmågor tolkade av Pettersson & Wistedt (2013)

F1. Förmåga att formalisera matematiskt material: att skilja form från innehåll, att operera med formella strukturer av relationer och samband

F2. Förmåga att generalisera matematiskt material.

F3. Förmåga att operera med siffror och andra symboler.

F4. Förmåga till sekventiellt, logiskt resonerande: kunna skilja på förutsättningar för och slutsatser av ett resonemang och förmågan att dra slutsatser från givna förutsättningar.

F5. Förmåga att förkorta resonemang, klart och enkelt i slutsatser.

F6. Förmåga till flexibilitet och reversibilitet, skifta tankemodeller och vända tankegångar.

F7. Förmåga att minnas matematisk information som gör det möjligt att använda erfarenheter i nya problemlösningssituationer, exempelvis relationer mellan storheter och argumentationsscheman.

F8. Generell fallenhet och intresse för matematik I en lust att söka matematiska aspekter av omvärlden.



Handlar om de förmågor eleven visar när hen är i en matematisk aktivitet.

De olika förmågorna samspelar och överlappar med varandra.

Enligt Krutetskii kan även de olika förmågorna kompensera för varandra.

Till exempel har svensk forskning visat att det finns ett starkt samband mellan förmågan att formalisera matematiskt material och förmågan att minnas matematisk information (Szabo, 2013), F1 och F7 i skolverkets stödmaterial.



Utgår från ett konkret fall (citerat från Mellroth, 2009)

Hur man kan identifiera och stimulera barns matematiska förmågor.



Mellroth, E. (2009). *Hur man kan identifiera och stimulera barns matematiska förmågor*. (Magisteruppsats). Växjö: Institutionen för Matematik och systematik, Växjö Universitetet.



4.2 TORNET (träff 1)

Vid träff 1 löste Marcus TORNET (Taflin, Hagland, & Hedrén, 2008, s. 85). Problemet går att lösa på många sätt, till exempel med hjälp av konkret material, genom att rita, göra tabell eller genom logiskt resonemang. Problemet är en påbyggnadsuppgift, det vill säga det utmanar eleven genom att torn större och större. Även om barnet börjar lösa på konkret material eller genom att rita, måste barnet byta lösningsstrategi när torn blir för högt för att kunna ritas eller byggas.



Figur 3 Bild till problemet TORNET. Tecknare Anders Stenroos.





- Hur många kuber behövs det för att bygga tornet på bilden?
- Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är 12 kuber högt?
- Hur många kuber behövs det för ett liknande torn som är n kuber högt?
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Marcus tittar på problemet i knappt 30 s, och säger;

☞ Marcus: 28 st

Jag frågar honom hur han tänker.

Marcus: *Det är ju 6 på en sida, det är 4 sidor, alltså gånger 4, sedan 3 plus 1 för den i mitten, det blir 28.*

Jag följer inte problemformuleringen utan låter tornet öka i höjd enligt följande. När tornet växer till 6 kuber högt respektive 10 kuber högt använder Marcus samma strategi.

Han adderar kuberna i en sida och multiplicerar sedan med 4. Därefter adderar han stapeln i mitten. Han gör allt i huvudet utan att göra någon anteckning. Det tar honom mindre än 2 minuter att beräkna antalet klossar i tornet som är 10 klossar högt.

När Marcus arbetar med TORNET visar han snabbt att han har förstått problemets **matematiska struktur**, det vill säga förmåga F1-1a (sid 15). Direkt delar han upp tornet i 4 sidor och en mittbit, han inser att han bara behöver räkna klossarna i en sida för att sedan multiplicera denna summa med 4.



20 klossar högt

Marcus: *Något på 200.*

Elisabet: *Det stämmer inte helt, kan du förklara hur du tänkte?*

Marcus: *Jag försökte på ett annat sätt nu. Jag tog alla tiotal först 11 till 19, de är 9 st, 9 gånger 10 är lika med 90. Sedan tog jag alla ental 1 till 10, de blir 55, nej nu vet jag vad jag gjorde fel, det blir 190.*

Marcus växlar mellan olika lösningsstrategier när han adderar talen 1 till 9, respektive 11 till 19. I detta arbetssätt uppvisar han förmåga F6 - 2d, **förmåga till flexibelt tänkande** (sid 16).

Markus hade tidigare i problemet (10 klossar högt torn) adderat talen 1 till 9 och hade då memorerat denna summa varför han visste att den var 45, vilket gjorde att han snabbt och lätt kunde arbeta med denna summa.

Elisabet: *Glömde du kanske också att multiplicera med 4?*

Marcus: *Ja, just det 190 gånger 4, då tar jag 100-talen först, alltså 400, sedan 9 gånger 4 är lika med 36, nej 360 menar jag, det blir 760 sedan plus 20, det behövs alltså 780 klossar.*

Marcus tänker lika snabbt som han pratar.

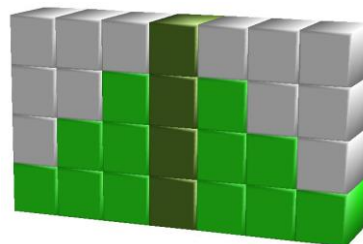
Jag utökar problemet till att bli 100 klossar högt.

Marcus visar upp en enastående huvudräkningsförmåga, men resultatet blir fel.

Marcus ger korrekta svar på de olika problemställningarna mycket snabbt, vilket är ett tecken på att han har förmåga F5 - 2c (sid 16). Det vill säga att han har ett **förkortat tänkande, hoppar över tankesteg.**



Jag frågar honom om han vill se ytterligare ett sätt att lösa problemet på. Han är mycket nyfiken. Jag visar honom med konkret material att tornet som är 4 klossar högt kan byggas om till en mur som är 4 klossar högt och 7 klossar brett (se Figur 4).



Markus ser hur han kan räkna och säger:

Då kan vi räkna ut det som 4 gånger 3 gånger 2 plus 4, det blir 28.

Vi behöver bygga ett torn som är fem klossar högt (se Figur 5) innan han ser sambandet.

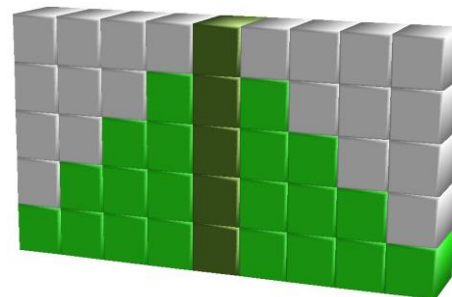
Direkt när detta torn är byggt säger han:

Marcus: Ja just det, då blir det ju fyra där!

Sedan hoppar han direkt på problemet där tornet är 100 klossar högt och säger:

Marcus: Då blir det ju 100 gånger 99 gånger 2, plus 100.

Marcus ger korrekta svar på de olika problemställningarna mycket snabbt, vilket är ett tecken på att han har förmåga F5 - 2c (sid 16). Det vill säga att han har ett **förkortat tänkande, hoppar över tankesteg.**



Genom att Marcus efter knappt två specialfall (när jag bygger "murar") lyckas generalisera lösningsmetoden uppvisar han förmåga F2 - 2b, **förmåga att generalisera** (sid 16).



Därefter räknar han ut det i huvudet på följande sätt:

Marcus: *9900 gånger 2 är lika med, 10000 gånger 2 som är 20000, 20000 minus 200 är 19800, sedan plus 100 för dom i mitten, det blir 19900! Ja, det skulle det vara!*

Jag frågar honom nu om han kanske till och med kan skriva upp hur många klossar som behövs om tornet ska vara 1 miljon klossar högt. Han ler lite och säger:

Marcus: *1 miljon gånger 999999 gånger 2, plus 1 miljon.*

Marcus engagemang och den intensitet han visar när han arbetar med problemet visar att han även har förmåga F8 - 4a, ett **matematiskt sinne** (sid 16).

Förmåga F4 - 2a (sid 16), **logiskt tänkande**, finns med genom hela Marcus arbete med problemet.

Han blir lycklig över att hittat ett enkelt sätt att beräkna hur många klossar som ingår i ett torn med höjden 1 miljon klossar. Här uppvisar han en tendens till förmåga F5 - 2e, det vill säga **strävan efter enkla, rationella lösningar** (sid 16).

Marcus ger korrekta svar på de olika problemställningarna mycket snabbt, vilket är ett tecken på att han har förmåga F5 - 2c (sid 16). Det vill säga att han har ett **förkortat tänkande, hoppar över tankesteg**.



Krutetskiis definition

Handlar om de matematiska förmågor (enligt Krutetskii nu, inte de som ska bedömas enligt kursplanerna) eleven visar upp när eleven är i en problemlösningssituation.



Uppgifter ska vara utmanande för alla

Differentiera undervisningen

Kriterier för fungerande differentiering.

Rika uppgifter (Rich learning tasks)



Sheffield, L. J. (2003). *Extending the challenge in mathematics: Developing mathematical promise in K-8 students*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.



KARLSTAD.SE

Utmanande uppgifter

Ett urval av kriterier

- Alla elever ska kunna börja. Uppgifter ska erbjuda utmaning på alla nivåer.
- Olika startpunkter, olika “mellanlägen”, olika lösningar och att olika saker tas hänsyn till.
- Kräva ett tänkande på en högre nivå och erbjuda problemlösning.
- Öppna slut.



Sheffield, L. J. (2003). *Extending the challenge in mathematics: Developing mathematical promise in K-8 students*. Thousands Oaks, CA: Corwin Press.



KARLSTAD.SE

Uppgiftens konstruktion

- Är komplexa,
- Bör attrahera elevernas glädje och nyfikenhet för problemlösning,
- Det matematiska innehållet ska vara tillräckligt så att varje elev ska kunna upptäcka intressant fakta där det också finns ett matematiskt djup,
- Uppgiften ska vara öppen för att arbeta med olika metoder, olika lösningsvägar och olika presentationsformer,
- Det ska vara möjligt att finna andra problem som härrör från det ursprungliga och som kan utforskas av eleverna (Benölken, 2015).



Benölken, R., (2015). "Mathe für kleine asse" – an enrichment project at the university of Münster. Paper presented at the 9th International MCG Conference, Sinaia, Romania, June 25-28 2015. pp. 140 - 145

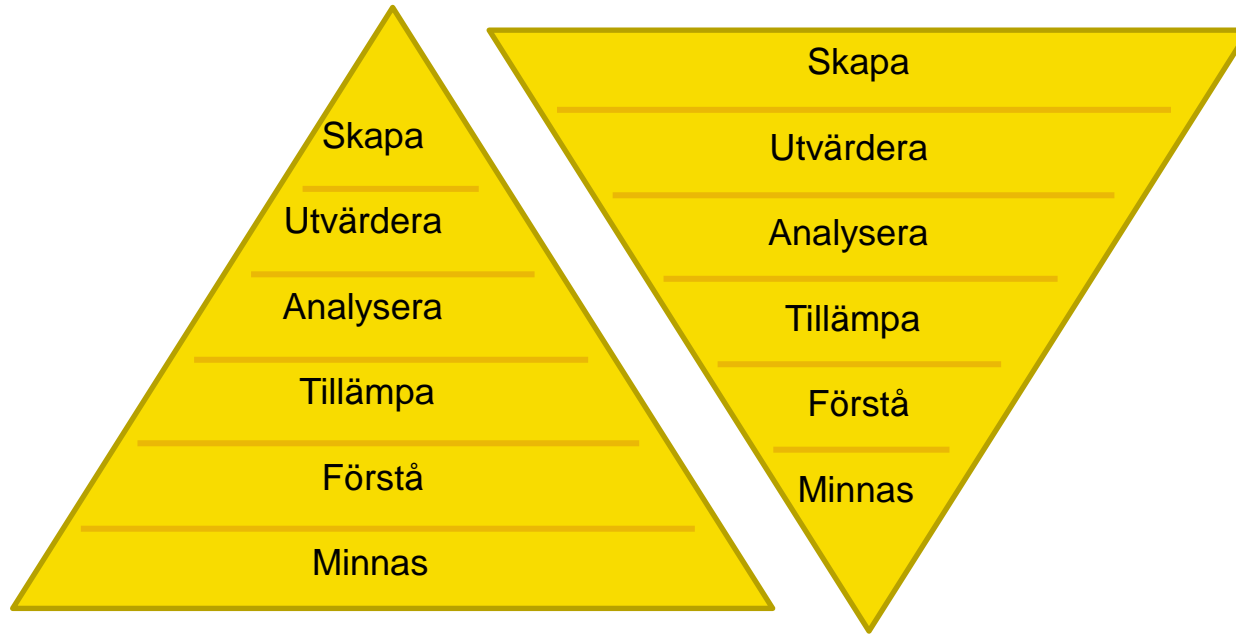


Att tänka på vid undervisning/uppgifter

- **Alla elever ska kunna börja.** Uppgifter ska erbjuda utmaning på alla nivåer.
- Uppmuntra till att finna mönster, förklara, resonera, generalisera och ifrågasätta.
- Tillåta att angripa uppgiften på flera olika sätt, använda olika strategier, verktyg, tekniker, modeller, ritningar...
- Uppmuntra kreativitet och innovation.
- Ha viktigt och användbart innehåll, uppmuntra eleverna att göra innehållet vettigt.
- Olika startpunkter, olika "mellanlägen", olika lösningar och att olika saker tas hänsyn till.
- Uppmuntra till engagemang, ämnesfokusering och samarbete.
- **Kräva ett tänkande på en högre nivå** och erbjuda problemlösning.
- Främja kompetens, självständighet och självförtroende.
- Möjliggöra för lärare och elever att själva att bedöma framgångar och svårigheter.
- **Öppet slut** (tillägg av projektet, se även Benölken (2015))



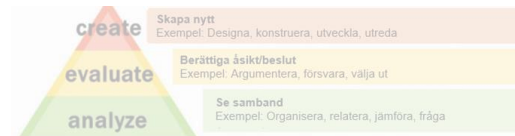
Att lära på olika sätt



Analysera och utveckla uppgifter

Utgå från en uppgift

1. Fundera på om alla, även svaga, kan börja på uppgiften.
2. Fokusera på det högre tänkandet, använd "Starta frågorna" för att utveckla uppgifterna. Speciellt fokus på elever med särskild begåvning.
3. Finns det ett öppet slut *en Cliffhanger* på uppgiften? Om inte kan ni utveckla uppgiften så att det finns?



Marknaden, från Åk 6, NP2016/2017 delprov C

På skolan finns en grupp som planerar marknaden. De är 20 personer i gruppen och medelvärdet av deras åldrar är 12 år. Det börjar tre nya personer som är 10 år, 11 år och 15 år i gruppen. Hur förändras medelvärdet?

Ringa in ditt svar och motivera.

Det höjs

Det sänks

Det förändras inte

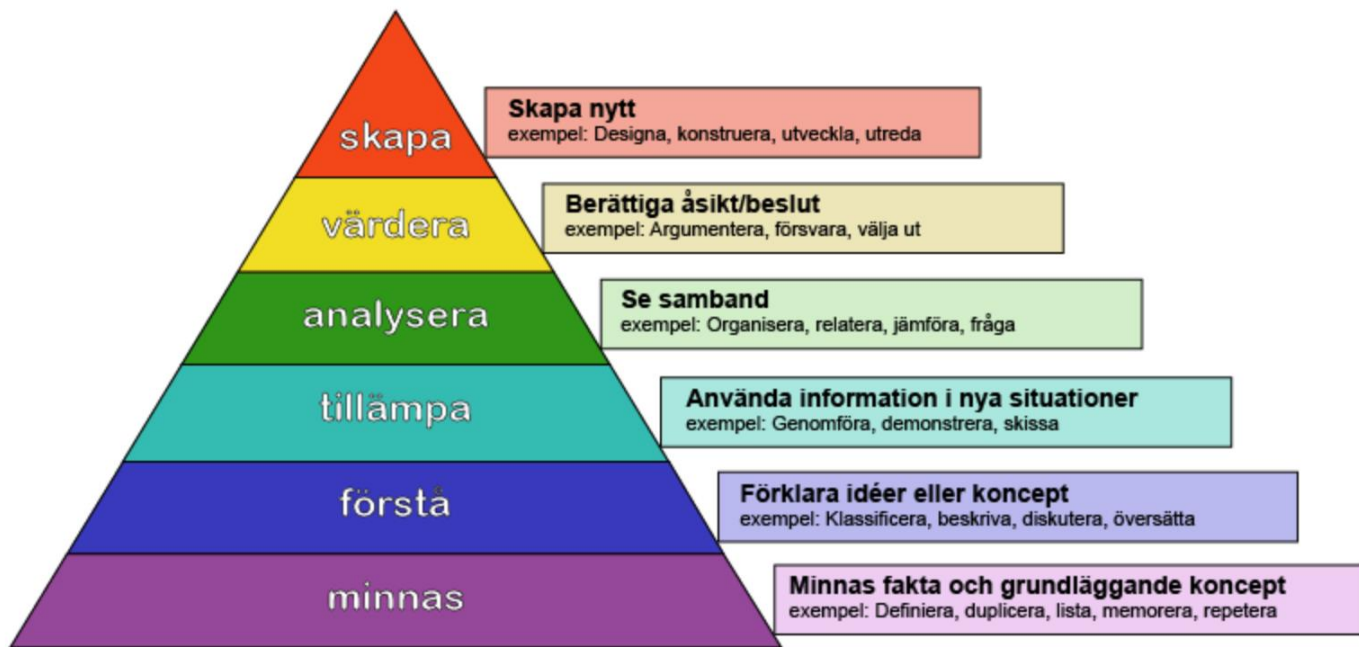
Det kan man inte säga

Analysera

- **Kan alla elever börja?**
- **Krävs ett tänkande på en högre nivå (Analysera, utvärdera, skapa)?**
- **Finns det ett öppet slut, en cliffhanger?**



BLOOMS REVIDERADE TAXONOMI (2001)



Källa: Vanderbilt University Center for Teaching

<https://cft.vanderbilt.edu/guides-sub-pages/blooms-taxonomy/>
https://sv.wikipedia.org/wiki/Blooms_taxonomi



KARLSTAD.SE

Bloom's Taxonomy



Frågor för att guida till ett högre ordningens tänkande

Skriv en/ett...

Organisera en...

Utveckla en/ett...

Designa...

Gör en plan för ...

Gör en ovanlig ...

Vad är fördelar och nackdelar
av/med...

Under förutsättning...
blir resultatet...

Övertyga...

Jämför...med...

Utveckla kriterier för...

Undersök hur ... är i förhållande till
varandra

Förklara vad som menas med ...

Rangordna...

Sök efter likheter och skillnader mellan...

Relatera ... till...

På hur många olika sätt...



Förändra uppgiften uppåt

På skolan finns en grupp som planerar marknaden. De är 20 personer i gruppen och medelvärdet av deras åldrar är 12 år. Det börjar tre nya personer som är 10 år, 11 år och 15 år i gruppen. Hur förändras medelvärdet?

Utökning:

Analysera

- **På hur många olika sätt** kan tre personer åldrar fördela sig till så att medelvärdet blir det samma som vid första förändringen?

Utvärdera

Tre andra personer började, då ökade medelvärdet med 2 mer än tidigare.

- **Utveckla kriterier för** hur man kan räkna ut de tre personernas åldrar om du vet det nya medelvärdet.

Skapa

- **Gör en plan för** hur man ska beräkna de tre personernas åldrar när man vet medelvärdet innan förändring och när man vet hur mycket medelvärdet förändras.



Arbeta vidare tillsammans

Lös uppgifter och diskutera

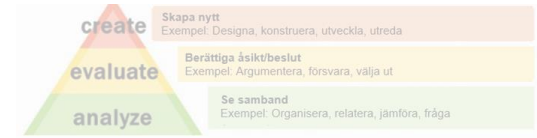
Välj en uppgift som ni tycker bra t.ex. från Skolverkets problembank eller annat ställe.

- 1) Lös uppgiften tillsammans.
- 2) Analysera och förändra uppgiften
- 3) Diskutera tillsammans, varför uppgiften behöver förändras:

Hur ska den förändras för att utmana elever med särskild begåvning?

Extra: Hur ska den förändras för att utmana elever med matematiksvårigheter?





Utgå från er valda uppgift

Analysera om den uppfyller kriterierna för elever med särskild begåvning, om inte utveckla dem så att de blir bättre.

1. Får elever med särskild begåvning i matematik utmaning?

Hur kan man arbeta med det sociala klimatet så att olika resultat ses som naturligt?

2. Det högre tänkandet,

använd "Starta frågorna" för att utveckla uppgifterna "uppåt",

3. Finns det ett öppet slut *en Cliffhanger* på uppgiften? Om inte kan ni utveckla uppgiften så att det finns?



Arbeta i grupper om 2-4 personer

Gör noggranna anteckningar, dokumentera för både dig själv och dina kollegor.

Gemensam samarbetsyta?



Hur tidigt?





<https://www.facebook.com/cool925/videos/10153068408664014/?fref=nf>



Exempel på omgjorda uppgifter av tidigare lärarstudenter



Gr. 5

Exempel 2: Chokladkakan

Fyra vänner ska dela på en chokladkaka. Celine får halva chokladkakan.

a) Om Anton får $\frac{1}{4}$ och Maja får $\frac{1}{8}$. Hur mycket får Karim?

b) Om Karim får 25 % av chokladkakan, hur stor del får Maja och Anton dela på?

c) Om chokladkakan består av 60 rutor och Maja får 0,20 av hela kakan, hur många rutor finns kvar

till Anton och Karim att dela på?

d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det

Förenkla

- Bråktalen uttrycks även i text
- På c) ändra till 100 rutor ist. För 60
- En halv även i bråk.
- Man kanske håller sig till en form

Svårare

- På hur många olika sätt om alla ska ha minst två bitar, jämnt antal etc
- Använda ord som gör att de måste tänka till extra



Gr4

Förenkling

- Skriver om ex. a) Gruset täcker $\frac{1}{2}$ av gården, gräset täcker $\frac{1}{3}$...
- b) Gruset täcker 50%, gräset 25%, ...

Försvåring

Ändrade till 16-delar, ojämna procent t.ex. 17%

745 kvadratmeter ist.f. 600 kvm

Exempel 1:
Skolgården

En gård är täckt av asfalt, gräs och grus. Gruset täcker halva gården.

- a) Om gräset täcker $\frac{1}{3}$ av gården, hur stor del täcker asfalten?
- b) Om gräset täcker 25 % av gården, hur stor del täcker asfalten?
- c) Om skolgården är 600 m^2 och gräset täcker 0,20 av gårdens area, hur många m^2 täcker asfalten?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Exempel 1 hämtad från: Problembanken Grundskola åk 4–6, modul: Problemlösning Kerstin Hagland, Maria



Gr 3

Försvåring

- På a) växt A är idag 120 cm, växt B 100 cm. Om 5 dagar är de lika långa. Utveckla formeln som beskriver detta.
- Rita graf

Förenkling

- Delade upp i fler frågor, ändrade talen till enklare
- Ex. hur hög är växten om 5 dagar. Mål att de räknar en sak i taget.
- Skulle kunna använda stapeldiagram som gr



Problemet Växter

Växten A är 120 cm hög och växer med 3 cm per dag.

Växten B är 100 cm hög och växer med 5 cm per dag.



- Hur höga är A och B efter fem dagar?
- Hur höga kommer A och B att vara när de är lika långa?
- Efter hur många dagar är B 100 cm högre än A?
- Hitta på ett liknande problem och lös det.



Gr 2

Förenkling

- A) samma
- B) 40 istället för 30 så att man bara behöver använda ett räknesätt
- C) Byta ut mot 300g för att få enklare beräkningar. Formulera om frågan för att förenkla språket.
- D) Ha kvar, viktigt att även matematiksvaga elever får vara kreativa.

Försvåring

- Flyttar upp B) till A) så att de kan använda två räknasätt direkt.
På b) utveckla ett recept för att göra 3 st chokladbollar
- C) 375 g smör.
- D) Hitta på ett svårare problem men liknande.



Problemet chokladbollar

Till 20 chokladbollar

100 g margarin
2 dl strösocker
3 dl havregryn
3 msk kakao



- a) Hur mycket av varje ingrediens går det åt till 10 chokladbollar?
- b) Hur mycket av varje ingrediens går det åt till 30 chokladbollar?
- c) Om man bara har 250 g margarin hemma men gott om övriga varor, hur många chokladbollar kan man göra då?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.



Gr 1

Förenklar

språket., begreppen.

Försvåra

Öka komplexiteten
genom svårare

Tal.

Exempel 2:

Chokladkakan

Fyra vänner ska dela på en chokladkaka. Celine får halva chokladkakan.

- Om Anton får $\frac{1}{4}$ och Maja får $\frac{1}{8}$. Hur mycket får Karim?
- Om Karim får 25 % av chokladkakan, hur stor del får Maja och Anton dela på?
- Om chokladkakan består av 60 rutor och Maja får 0,20 av hela kakan, hur många rutor finns kvar till Anton och Karim att dela på?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det

I

Förenkling:

Fyra vänner ska dela på en chokladkaka. Celine får $\frac{4}{8}$ av chokladkakan.

Tips! Rita.

- Om Anton får $\frac{2}{8}$
och Maja får $\frac{1}{8}$.
Hur mycket får Karim?
- Om Karim får 25% av chokladkakan:
Hur stor del är kvar?
- Om chokladkakan består av 60 rutor och Maja får 20%:
Hur många rutor finns kvar?
- Hitta på ett liknande problem. Lös det!



Det finns material med bra uppgifter

Exempel

Rika matematiska problem: Hagland, Hedrén, Taflin

32 Rika problem i matematik: Larsson

Matematisk utflykt: Chapovalova

Populära problem: Chapovalova

Undersökande matematik: Petersson

Med rätt att utmanas: Mellroth



Med rätt att utmanas - i en skola för alla

Att utveckla verksamheten kring att inkludera elever med särskilt
begåvning i lärande.

Del 2: Uppgifter

För skollärares utveckling i Karlstads kommun 2015-2017

Elisabet Mellroth

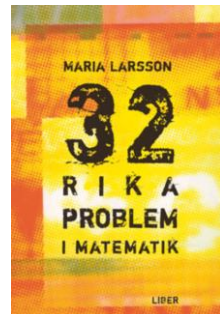
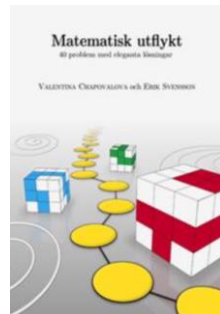
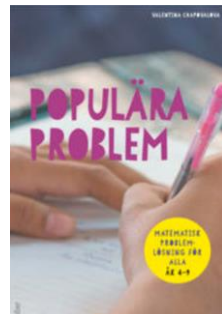
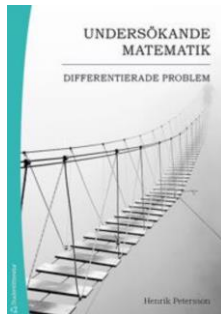
Utses 2. utg. 2018. Rapporten kommer att omredas och uppdateras regelbundet.

Enkelt lösen för lärare och utveckling för elever med särskilt

begåvning

KARLSTADS KOMMUN

LJUNGBERGS
FONDEN



Kommande konferenser

28 -31 aug 2024 ECHA (European Council for High Ability)Thessaloniki, Grekland. *Flera från GiftEd forskarskolan (KAU) samt deltagare från Jönköpings kommun kommer åka.* <https://echa2024.gr/>

16 – 18 juni 2025 ECHA tematisk samt igMCG (international group of mathematics, creativity and giftedness) Karlstad, Sverige
<https://www.kau.se/forskarskolan-om-sarskilt-begavade-barn/konferenser/kombinerad-echa-och-igmcg-konferens-16-18-0>

Håll koll på Mattetalanger <https://mattetalanger.ncm.gu.se/>
NNGE (KAU) <https://www.kau.se/natverksarskildbegavning>



16 – 18 juni 2025 i Karlstad

KOMBINERAD ECHA OCH IGMCG KONFERENS 16-18 JUNI 2025



<https://www.kau.se/forskarskolan-om-sarskilt-begavade-barn/konferenser/kombinerad-echa-och-igmcg-konferens-16-18-0>



KARLSTAD.SE

Tack för er uppmärksamhet

Elisabet Mellroth

Vid eventuella funderingar kontakta mig gärna 😊.

elisabet.mellroth@kau.se



Utvalda problem f-3

Från Skolverkets lärportal
https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/9-lasa-skriva-rakna/Grundskola/415a-Problemlosning-f-3/se-aven/Material/Problembank_F-ak3.docx



FISKAR

Kim ska köpa fiskar till sitt akvarium. I djuraffären kostar 4 fiskar 10 kr.

- a) Hur många fiskar får Kim för 20 kr?
- b) Hur många fiskar får Kim för 15 kr?
- c) Hur mycket kostar 10 fiskar?
- d) Hitta på en egen liknande problemuppgift. Lös den.



https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/9-lasa-skriva-rakna/Grundskola/415a-Problemlosning-f-3/se-aven/Material/Problembank_F-ak3.docx



KARLSTAD.SE

SOLROSEN

Kjell planterar ett solrosfrö. Efter 6 dagar är solrosen 10 cm hög.

- a) Hur hög var solrosen efter 3 dagar?
- b) Hur många dagar tar det innan solrosen är 20 cm hög?
- c) Hur många dagar tar det innan solrosen är 25 cm hög?
- d) Hitta på en egen liknande problemuppgift. Lös den.



https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/9-lasa-skriva-rakna/Grundskola/415a-Problemlosning-f-3/se-aven/Material/Problembank_F-ak3.docx



SANGLÅDAN

10 barn leker i sandlådan. De har varsin spade, gul eller röd. 6 barn är flickor. 5 barn har gul spade. 2 pojkar har röd spade.

- a) Hur många flickor har gul spade?
- b) Hitta på en liknande problemuppgift och lös den.



https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/9-lasa-skriva-rakna/Grundskola/415a-Problemlosning-f-3/se-aven/Material/Problembank_F-ak3.docx



KARLSTAD.SE

KLUBBEN

10 barn leker i sandlådan. De har varsin spade, gul eller röd. 6 barn är flickor. 5 barn har gul spade. 2 pojkar har röd spade.

En skolklubb har 25 medlemmar. De går i klass 2 eller 3.

14 går i klass 3.

4 är pojkar i klass 2.

15 är flickor.

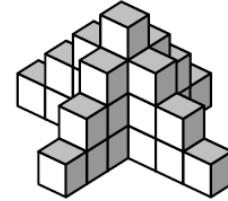
- Hur många går i klass 2?
- Hur många flickor går i klass 2?
- Hur många pojkar går i klass 3?
- Hitta på en liknande problemuppgift och lös den.



https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/9-lasa-skriva-rakna/Grundskola/415a-Problemlosning-f-3/se-aven/Material/Problembank_F-ak3.docx



TORNET



- Hur många kuber behövs för att bygga tornet på bilden?
- Hur många kuber behövs för att bygga ett liknande torn som är 6 kuber högt?
- Hur många kuber behövs för att bygga ett liknande torn som är 10 kuber högt?
- Hitta på en liknande problemuppgift. Lös den.



https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/9-lasa-skriva-rakna/Grundskola/415a-Problemlosning-f-3/se-aven/Material/Problembank_F-ak3.docx



Problemet chokladbollar

Till 20 chokladbollar

100 g margarin

2 dl strösocker

3 dl havregryn

3 msk kakao



- Hur mycket av varje ingrediens går det åt till 10 chokladbollar?
- Hur mycket av varje ingrediens går det åt till 30 chokladbollar?
- Om man bara har 250 g margarin hemma men gott om övriga varor, hur många chokladbollar kan man göra då?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

<https://larportalen.skolverket.se/api/resource/P03WCPLAR154656>



Problemet Cykeltur

Det brukar ta 12 min för Per att cykla till skolan som ligger 2 km bort.

- a) Hur lång tid tar det då för Per att cykla till biblioteket som är 3 km bort?
- b) Hur lång tid tar det då för Per att cykla till sin kompis som bor 4,5 km bort?
- c) Hur långt hinner Per cykla på en halvtimme?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.



<https://larportalen.skolverket.se/api/resource/P03WCPLAR154656>



KARLSTAD.SE

Problemet Klubben



En skolklubb har 50 medlemmar.
De går i klass 4, 5 eller 6.

- 15 går i klass 4
- 15 går i klass 6
- 7 är pojkar i klass 4
- 8 är pojkar i klass 5
- 29 är flickor

- a) Hur många går i klass 5?
- b) Hur många flickor i klubben går i klass 6?
- c) Vad kan man mer tänka ut?
- d) Hitta på ett liknande problem och lös det.



<https://larportalen.skolverket.se/api/resource/P03WCPLAR154656>



KARLSTAD.SE

Problemet Växter

Växten A är 120 cm hög och växer med 3 cm per dag.

Växten B är 100 cm hög och växer med 5 cm per dag.



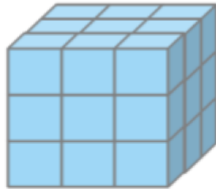
- Hur höga är A och B efter fem dagar?
- Hur höga kommer A och B att vara när de är lika långa?
- Efter hur många dagar är B 100 cm högre än A?
- Hitta på ett liknande problem och lös det.

<https://larportalen.skolverket.se/api/resource/P03WCPLAR154656>



Problemet Målade kuber

Lotta har limmat ihop 27 likadana små kuber till en stor kub som på bilden. Sedan målar hon den stora kuben runt om på alla sidytor.



Hur många av de små kuberna har sedan

- a) Tre sidor målade?
- b) Två sidor målade?
- c) En sida målade?
- d) Ingen målade sida?
- e) Hur många små kuber är målade på 0, 1, 2, 3 sidor om den stora kuben innehåller 64 eller 125 mindre kuber?
- f) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

<https://larportalen.skolverket.se/api/resource/P03WCPLAR154656>



Problemet Snöbollar

Agnes hade rullat tre gånger så många snöbollar som Sixten, så när som på två. Hur många hade var och en av dem rullat om de tillsammans hade gjort



- a) 10 snöbollar?
- b) 26 snöbollar?
- c) mellan 40 och 60 snöbollar?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

<https://larportalen.skolverket.se/api/resource/P03WCPLAR154656>



Nätverk

International group of Mathematical Creativity and Giftedness (MCG) – frivillig avgift

<http://www.igmcg.org/> nyhetsbrev och konferenser. Kontakta Elisabet Mellroth

European Council for High Ability, ECHA

<https://echa-site.eu/> 600 Euro/år får till journal 2 ggr/år, nyhetsbrev och konferenser. Kontakta Elisabet Mellroth, elisabet.mellroth@karlstad.se

World Council of Gifted and Talented Children, WCGTC, www.world-gifted.org,
600 Euro/år får tillgång till journal och nyhetsbrev. Kontakta Elisabet Mellroth,
elisabet.mellroth@karlstad.se

Nordic Network for Gifted Education vid KAU (NNGE)

<https://www.kau.se/natverksarskildbegavning>

