

TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 6

Agenda

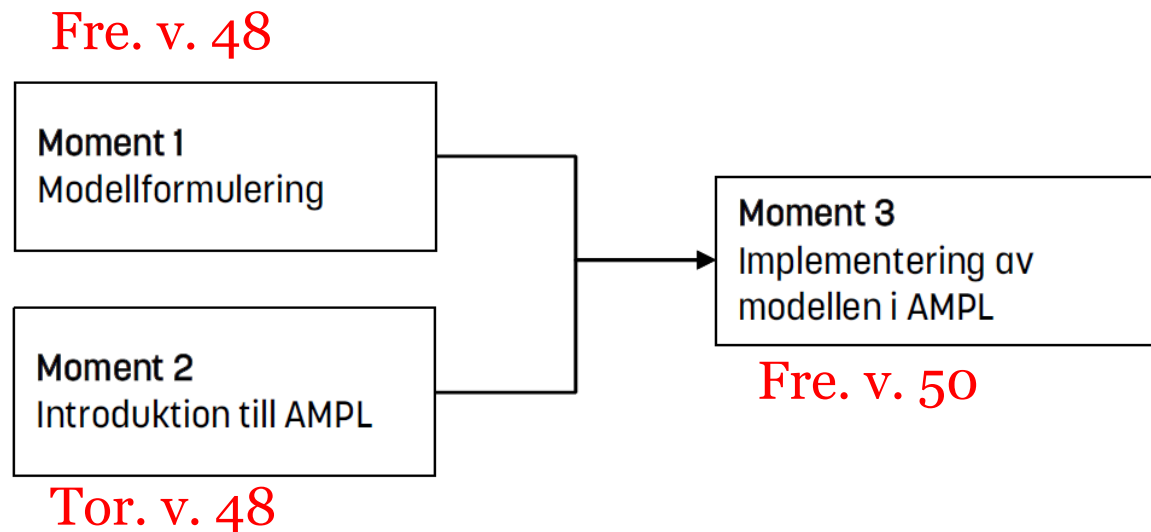
- Kursens status
- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

Kursens status

- Föreläsning (1), 2-5: Modellering
- Föreläsning 6-10, (11): Lösningmetod/känslighetsanalys
- Gruppuppgifter:
 - Gruppuppgift 1:
 - Redovisas muntligt v. 47. Uppgiften och en anmälninglista ligger på Lisam.
 - Gruppuppgift 2:
 - Redovisas muntligt v. 49. Uppgiften och en anmälninglista kommer läggas upp på Lisam under v. 47.
 - Gruppuppgift 3:
 - Redovisas skriftligt senast onsdag v. 51. Uppgiften och en anmälninglista kommer läggas upp på Lisam under v. 48

Kursens status

- Laborationsmomentet:
 - Anmänningslistan ligger ute. Skriv upp er!
 - Läs redan nu labbinstruktionen som ligger på Lisam!



Hittills

- Föreläsning 1: kursadministration, intro: Vad är matematisk modellering?, historia, tillämpningsexempel, komplexitet
- Föreläsning 2: summering och index, matematisk modellering
- Föreläsning 3: matematisk modellering, LP
- Föreläsning 4: matematisk modellering, HP
- Föreläsning 5: matematisk modellering, nätverk

Idag

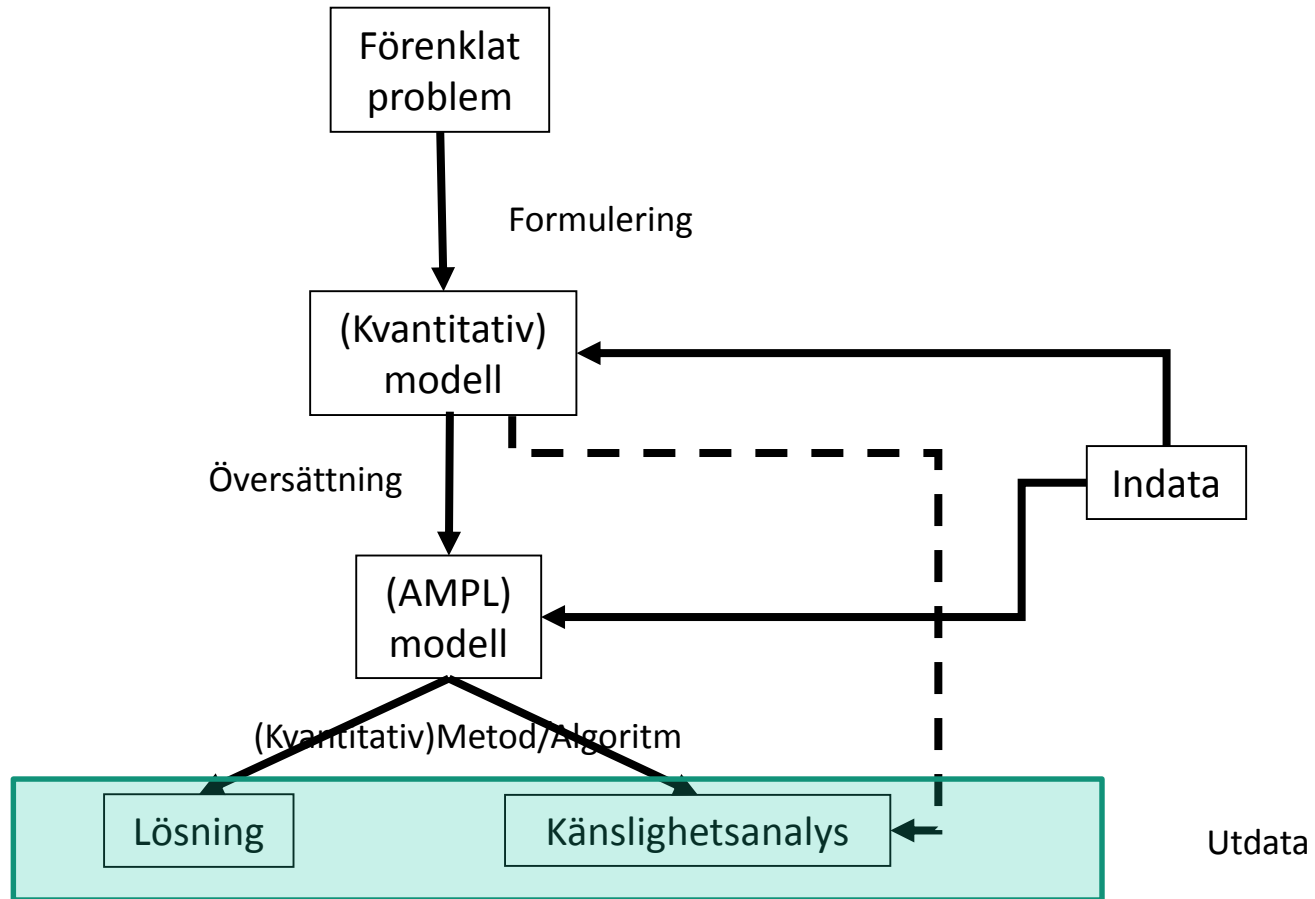
Studenten ska efter avslutad kurs kunna:

- Analysera och formulera optimeringsmodeller inom ekonomiska tillämpningsområden
- Analysera och dra slutsatser från känslighetsanalys för linjära optimeringsproblem och optimeringsproblem med nätverksstruktur
- Förklara den grundläggande matematiska teorin på vilka modeller och algoritmer bygger
- Dra slutsatser från optimeringsmetoder för linjära optimeringsproblem (Simplexmetoden) samt för optimeringsproblem med nätverksstruktur (Simplex för minkostnadsflödesproblem och Dijkstras algoritm för billigasteväg problem)

Agenda

- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

Kvantitativa metoder/modellering



Tolkning utdata

- Utdata är (naturligtvis) oftast
 - Optimalt målfunktionsvärde
 - Optimala värden på variabler (optimallösningen)
- Jämför två utdata med olika indata kan ge svar
 - T.ex.
 - Vad tjänar vi på om ...
 - Hur förändras lösningen om ...
 - Etc.

Tolkning utdata

- Utdata kan också ge en mängd annan information
 - Hur ”stabil” är lösningen
 - Vad händer vid (mindre, enstaka) förändringar
- Detta kallas vanligtvis känslighetsanalys
 - Oftast en biprodukt av lösningen
 - Marginell ytterligare databehandling
 - Praktiskt intressant i stora/gigantiska problem
 - Vi tittar på pytteproblem, där metoden blir viktigare än praktiken
 - Metoder återkommer vi till

Linus, igen

”Linus har kommit på att pannkakor och sockerkakor säljer bra i Norrköping. En pannkaka ger honom 8 kronor i vinst och en sockerkaka 15 kronor. En pannkaka tar 4 minuter att göra, medan en sockerkaka tar 10 minuter. Eftersom Linus även studerar på universitetet, har han högst 2 timmar varje dag i sin firma. Hemligheten bakom hans goda pannkakor och sockerkakor är äggen han köper av en bonde i Askeby, och saltet hämtas ur Gullmarsfjorden. Bonden kan bara sälja 20 ägg per dag till Linus. Varje sockerkaka kräver 2 ägg och varje pannkaka 1/3 ägg. Formulera Linus (vinstmaximerings)problem! Det nordliga klimatet gör att han bara kan få fram 20 kryddmått salt per dag. Varje pannkaka innehåller ett kryddmått salt”

Känslighetsanalys

- Bakproblemet
 - Optimal lösning: 20 pannkakor, 4 sockerkakor
 - Optimalt målfunktionsvärde: 220
 - Optimalt målfknvärde om 20 minuter till
 - 250
 - Dvs ”värde/beredd betala” $(250-220)/20=1.5/\text{minut}$
 - Optimalt målfknvärde om ytterligare 20 minuter till
 - 260
 - Dvs ”värde/beredd betala” $(260-250)/20=0.5/\text{minut}$
 - Optimalt målfknvärde om ytterligare 1 miljard minuter till
 - 260!

```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 220
1 dual simplex iterations (1 in phase I)
```

Optimalt målfunktionsvärde

```
suffix up OUT;
suffix down OUT;
suffix current OUT;
vinst = 220
```

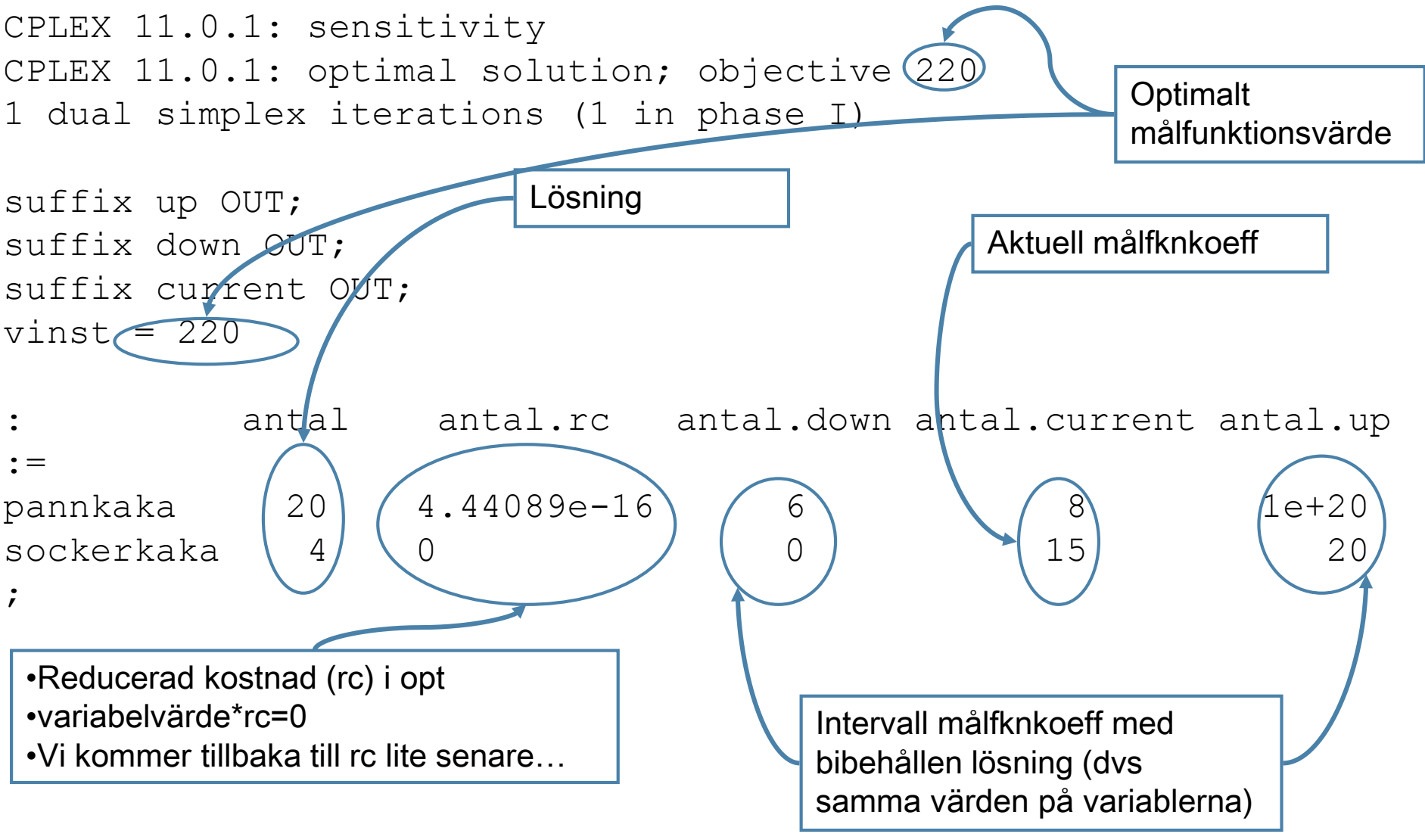
Lösning

Aktuell målfkoeff

	antal	antal.rc	antal.down	antal.current	antal.up
pannkaka	20	4.44089e-16	6	8	1e+20
sockerkaka	4	0	0	15	20

- Reducerad kostnad (rc) i opt
- variabelvärde*rc=0
- Vi kommer tillbaka till rc lite senare...

Intervall målfkoeff med bibehållen lösning (dvs samma värden på variablerna)

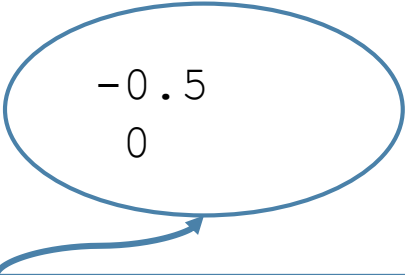


```
CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 150
1 dual simplex iterations (1 in phase I)
```

Om vinsten för en pannkaka bara är 2kr

```
suffix up OUT;
suffix down OUT;
suffix current OUT;
vinst = 150
```

	antal	antal.rc	antal.down	antal.current	antal.up
pannkaka	0	-0.5	-1e+20	2	2.5
sockerkaka	10	0	12	15	1e+20



- rc: marginalförändring av målfunktionen om pannkaka > 0
- För att vi ska vilja baka pannkakor måste vinsten öka med minst 0.5 per pannkaka

```

CPLEX 11.0.1: sensitivity
CPLEX 11.0.1: optimal solution; objective 220
1 dual simplex iterations (1 in phase I)

```

Slack=Tillgänglig
(outnyttjad) resurs

(HL = Högerled)

Om vinsten för en pannkaka är 8kr
(som i ursprungsmodellen)

Dual= Förändrat
målfknvärde per enhets
ökning av HL

•Intervall HL med bibehållen samma villkor
begränsande, dvs med oförändrat dualvärde
•Dock naturligtvis förändrad lösning om slack=0

Aktuellt HL

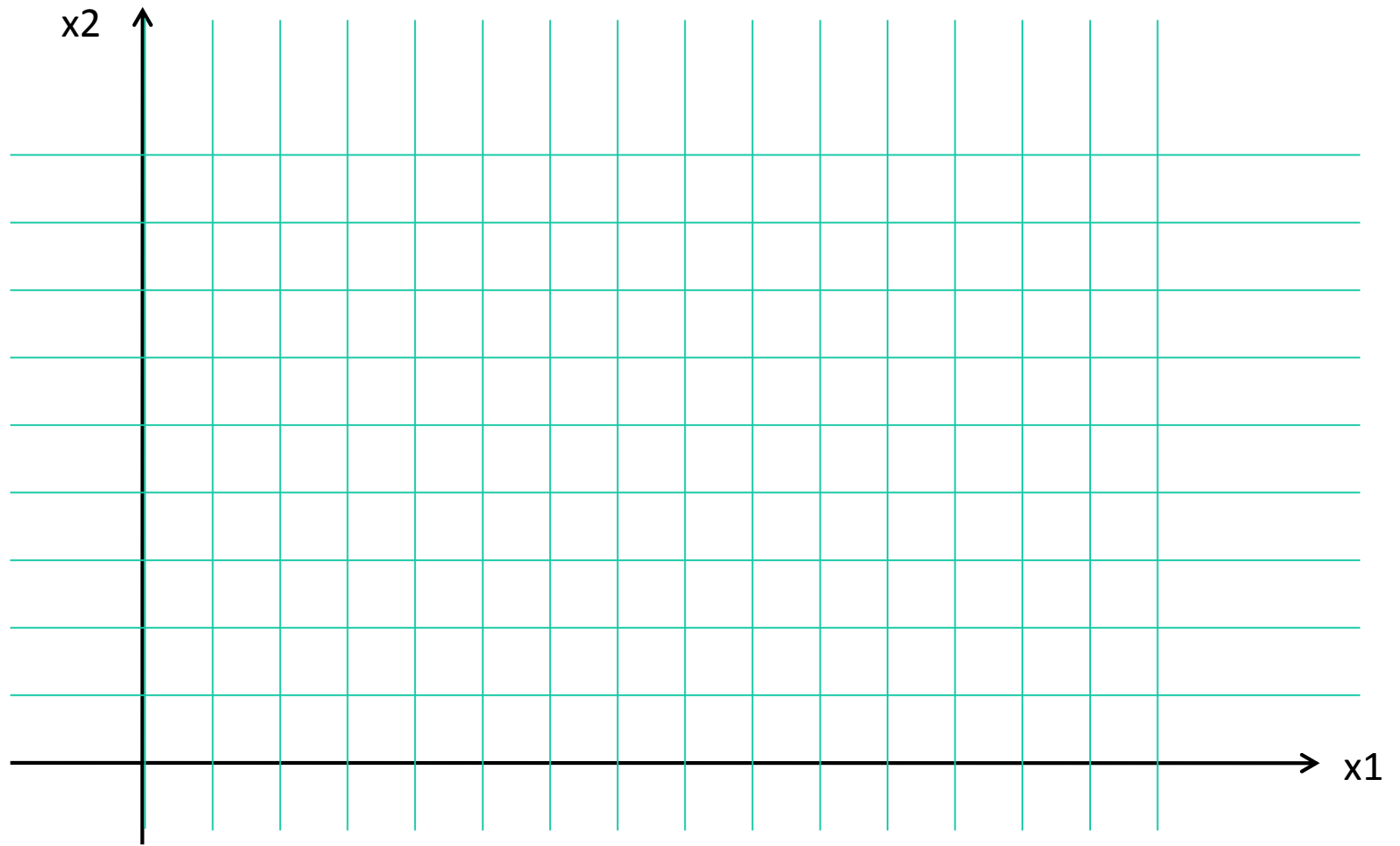
:	biv.slack	biv.dual	biv.down	biv.current	biv.up	:
agg	16	0	44	60	1e+20	
salt	0	2	8.57143	20	30	
tid	0	1.5	80	120	146.667	
;						:=

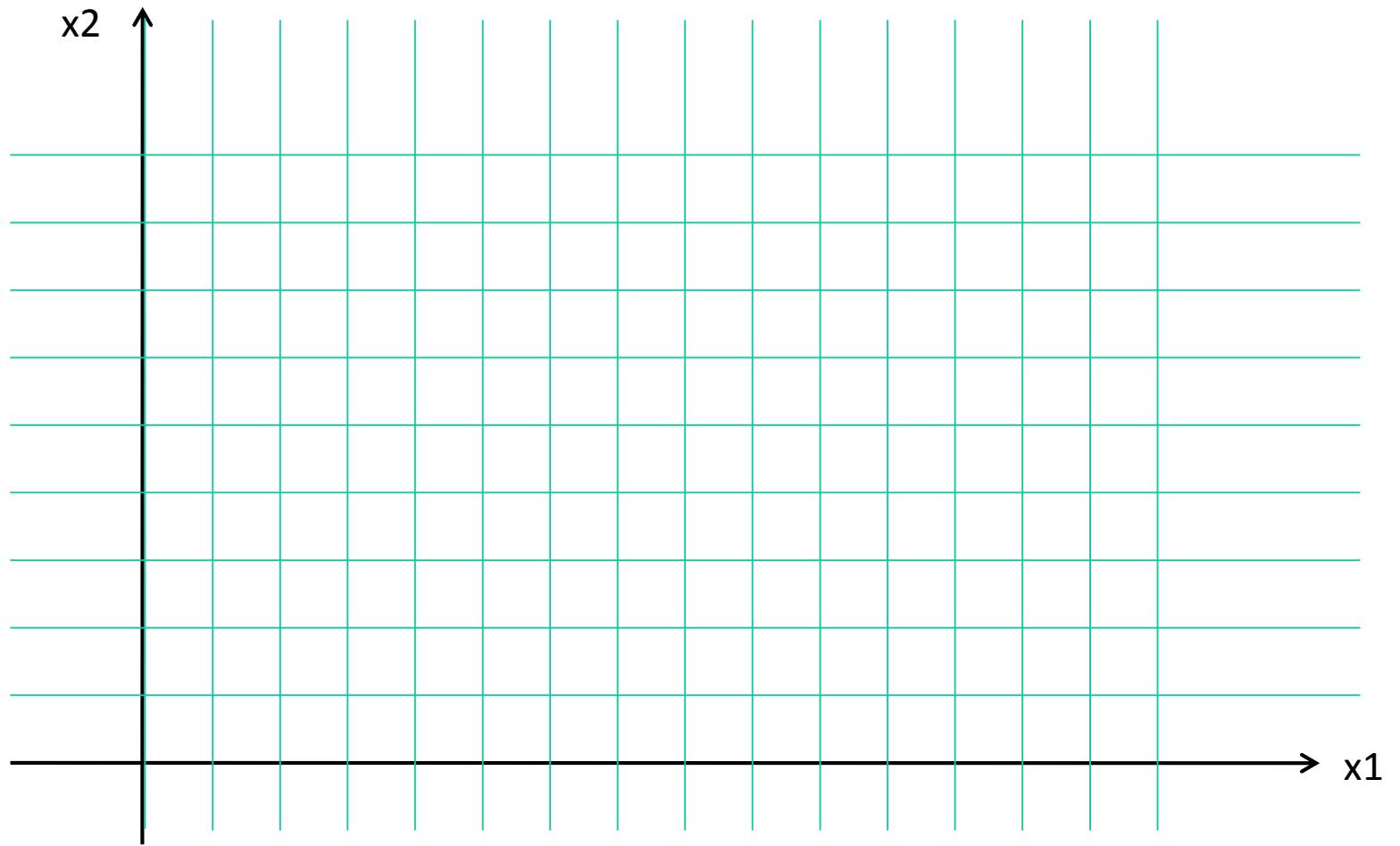
Agenda

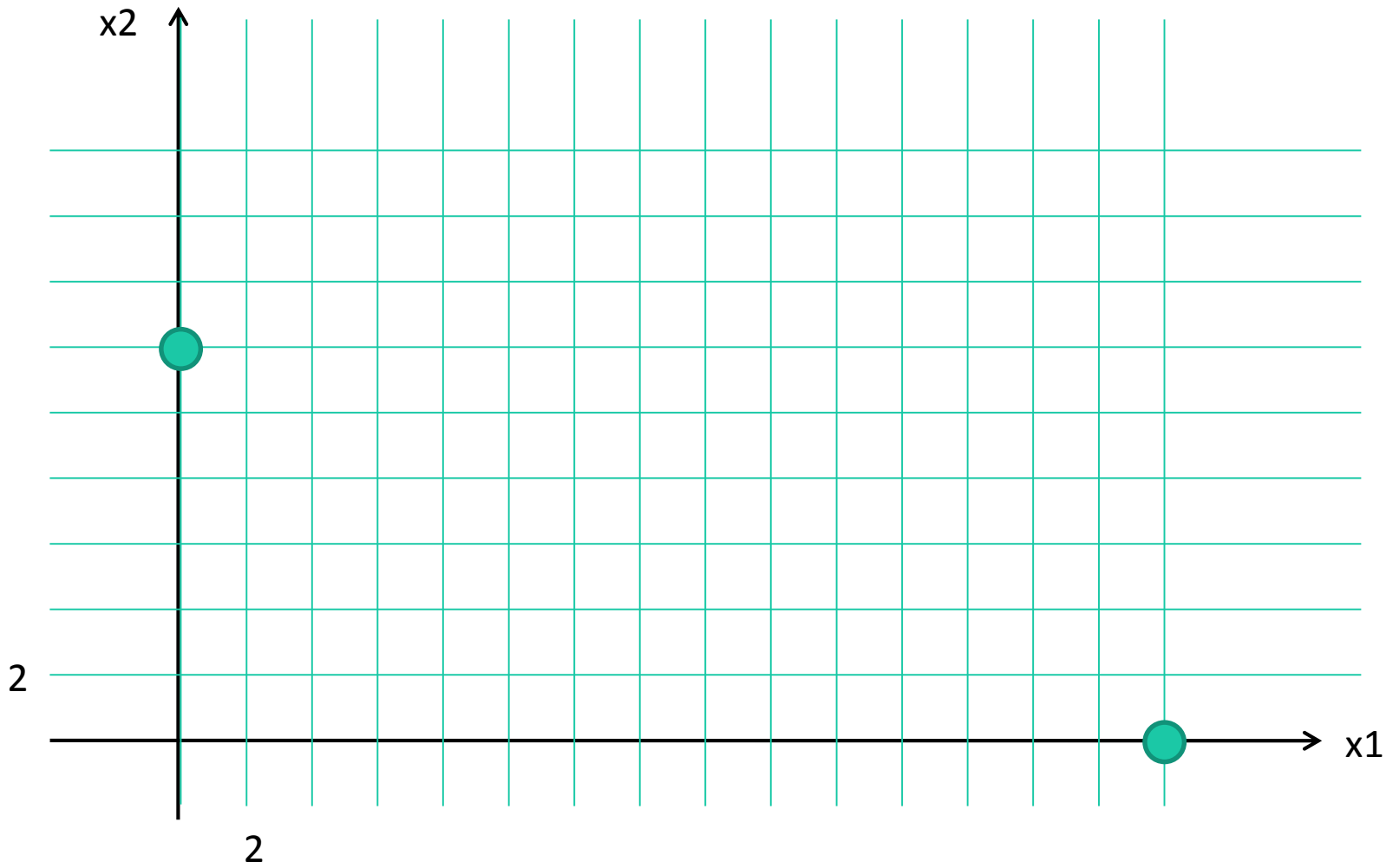
- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

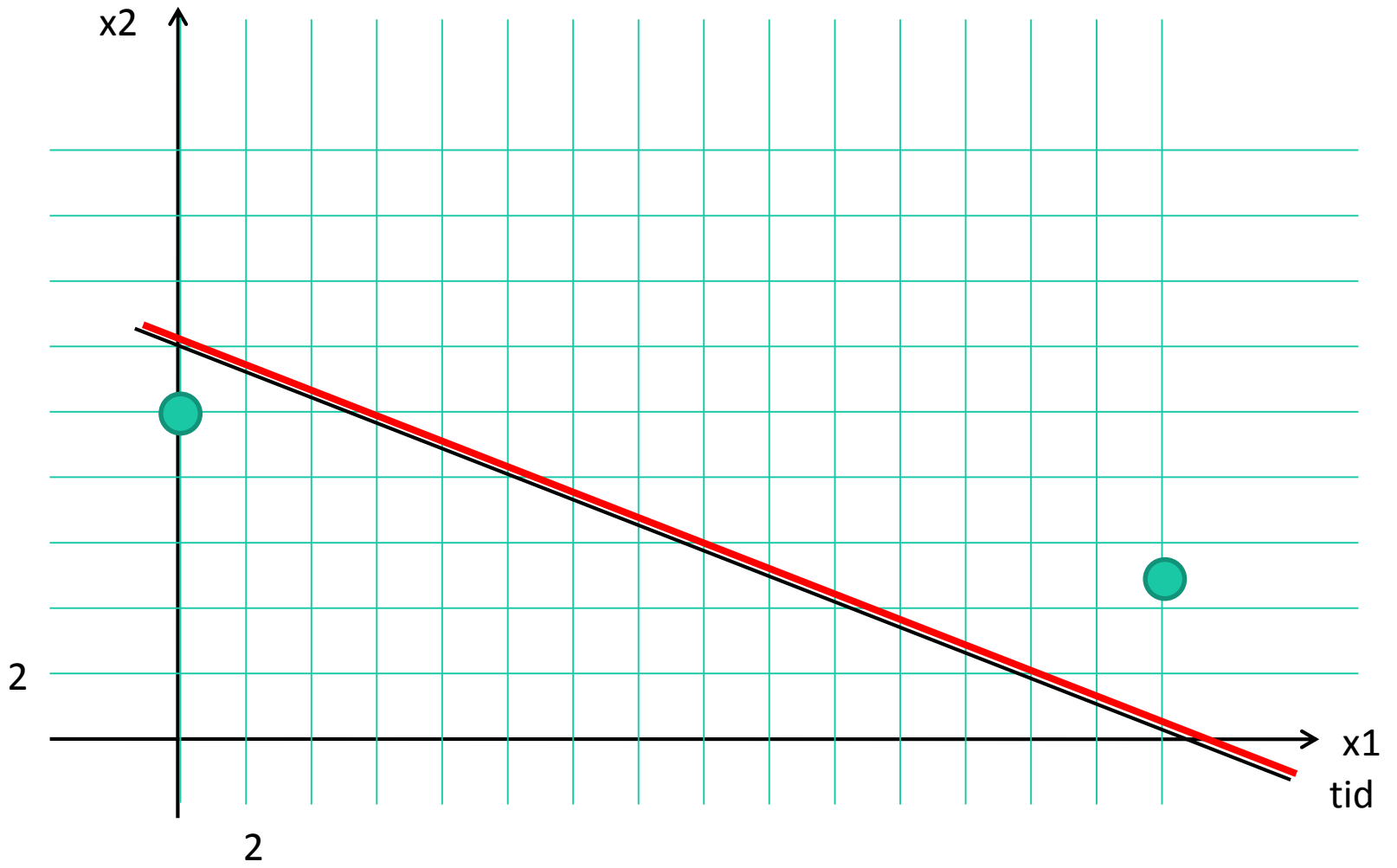
Generell sökmetod

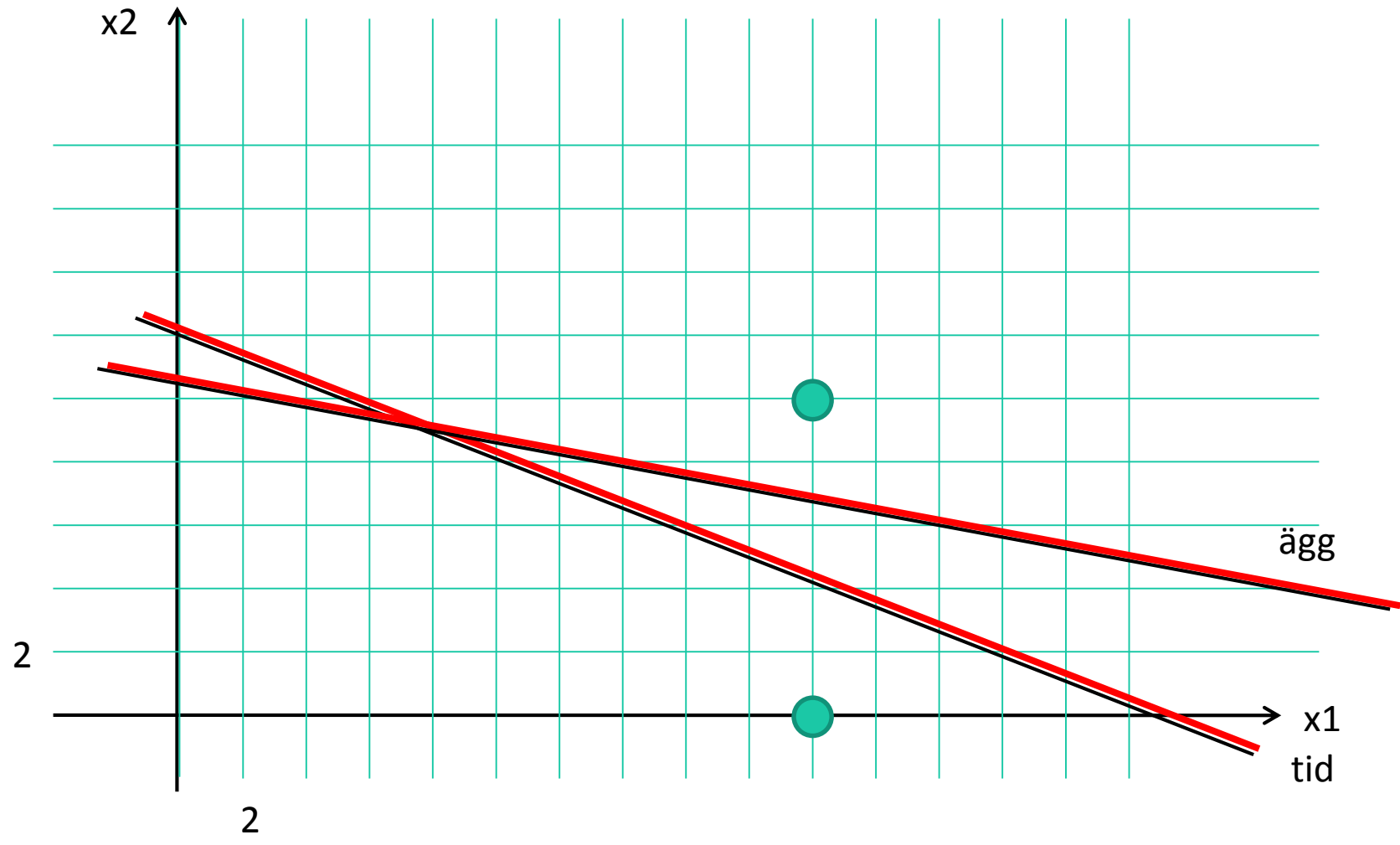
- Steg 0 Börja i en tillåten startpunkt
- Steg 1 Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning
- Steg 2 Kontrollera avbrott. Saknas tillåten och förbättrande sökriktning är vi i (lokalt) opt
- Steg 3 Bestäm steglängd
- Steg 4 Beräkna nya punkten genom att gå steglängden i förbättrande sökriktningen
- Steg 5 Repetera från steg 1

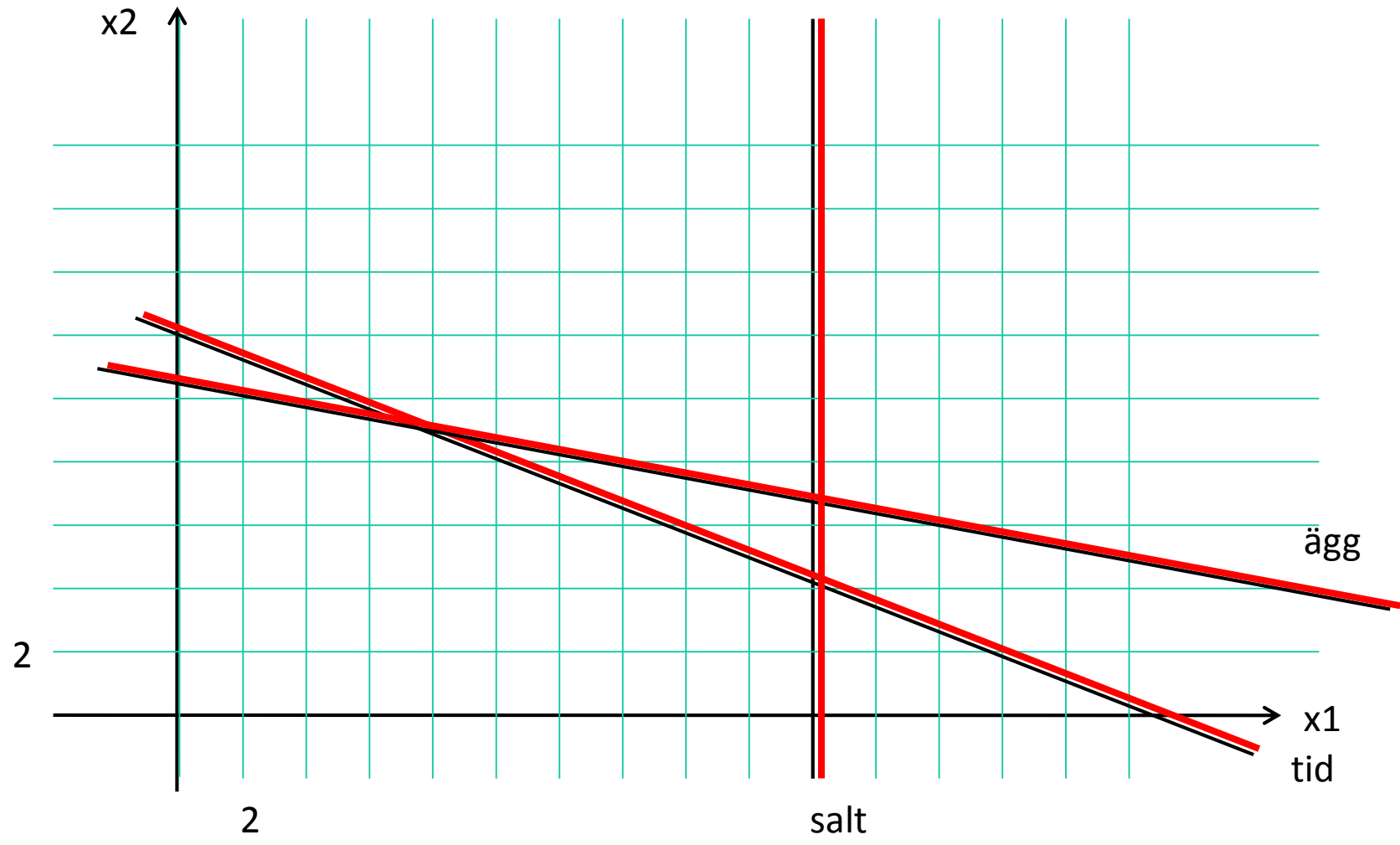


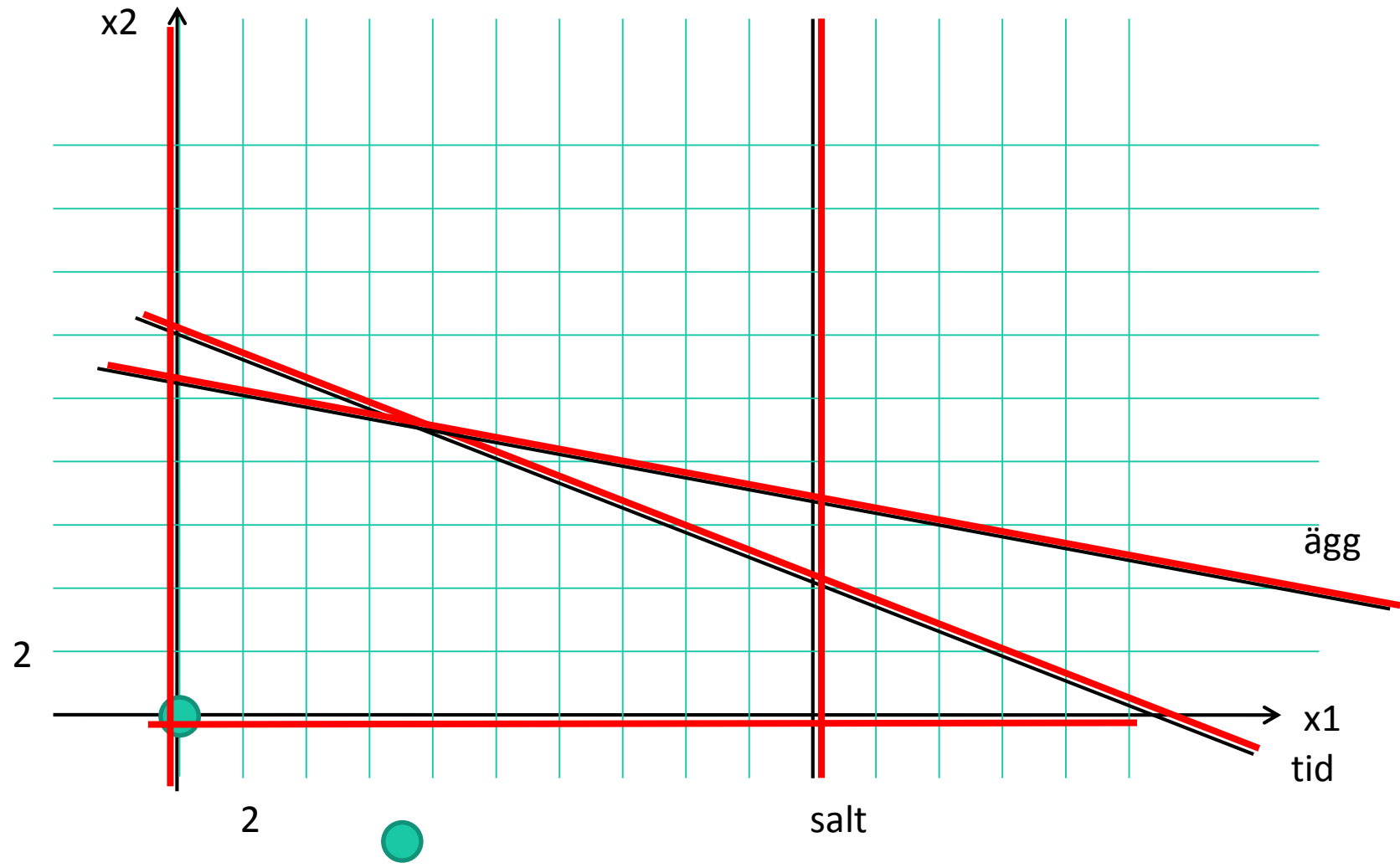


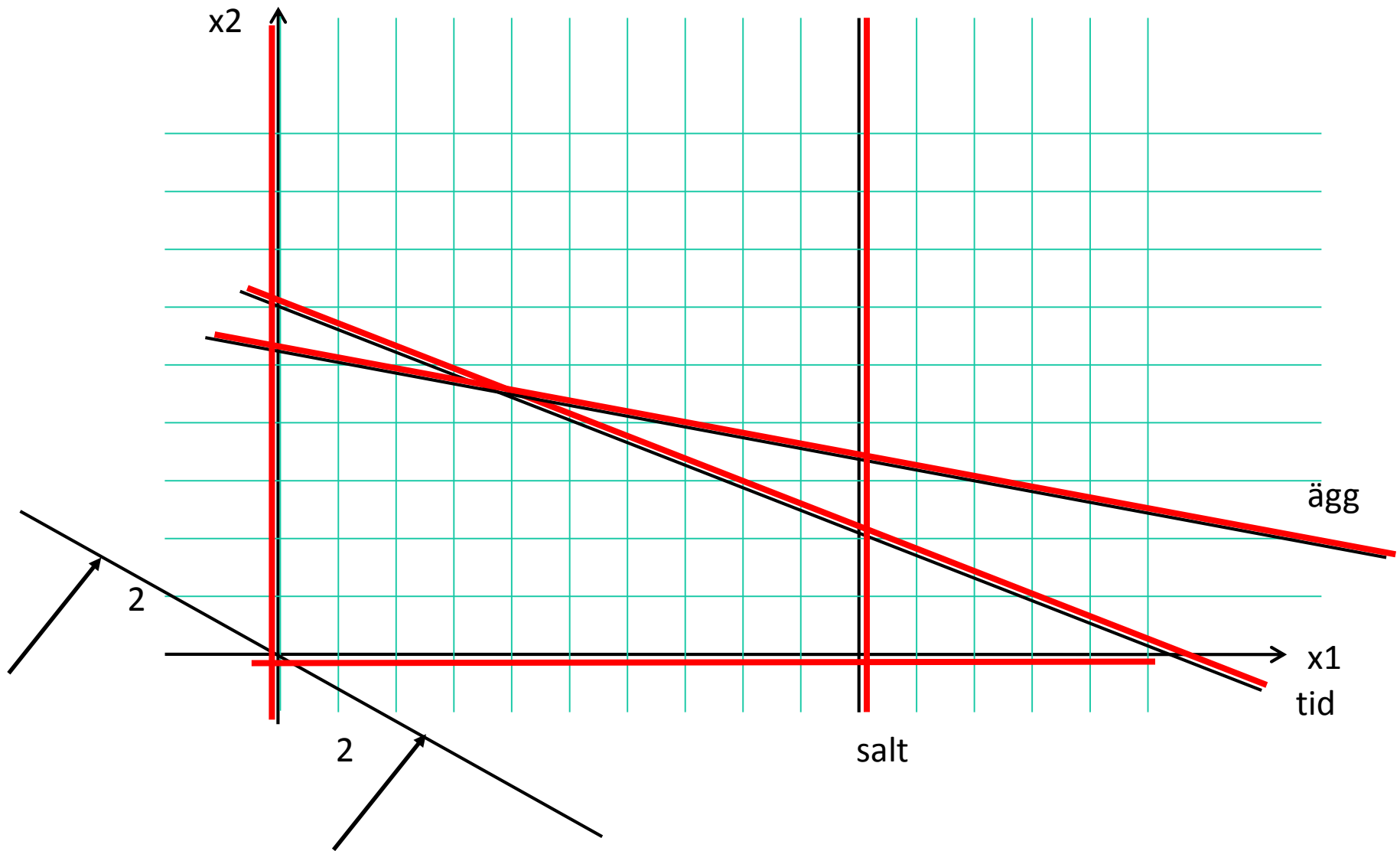


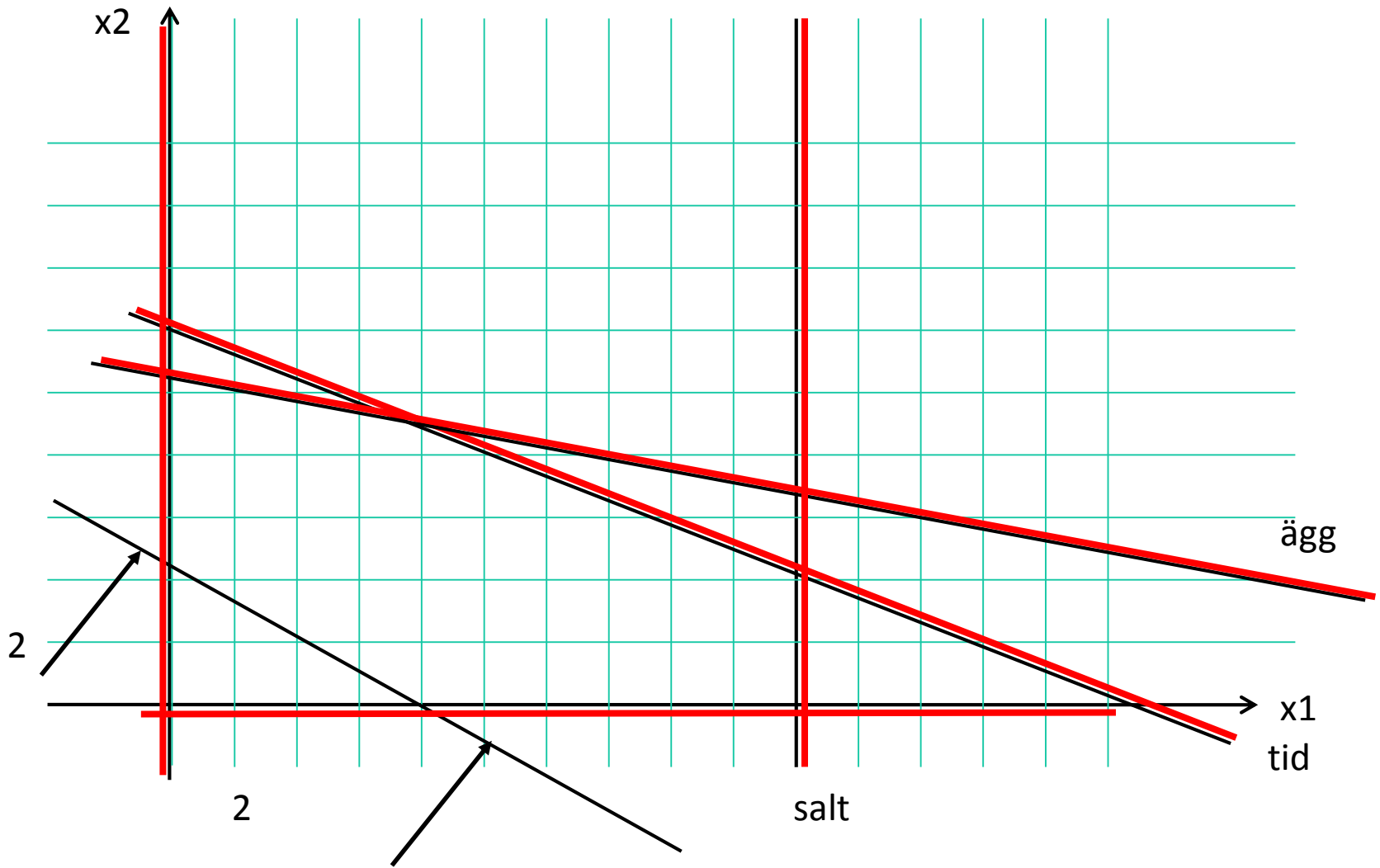


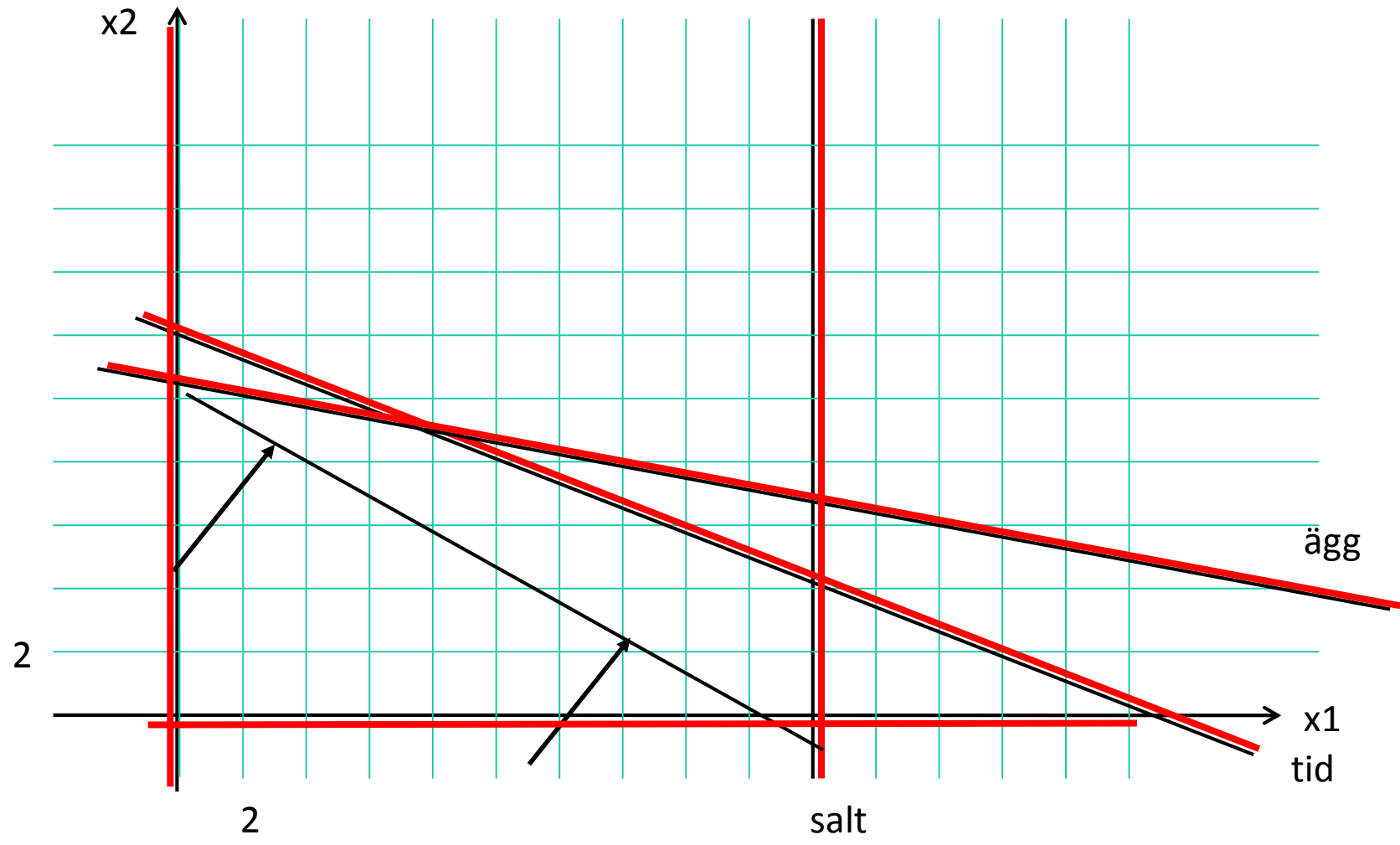


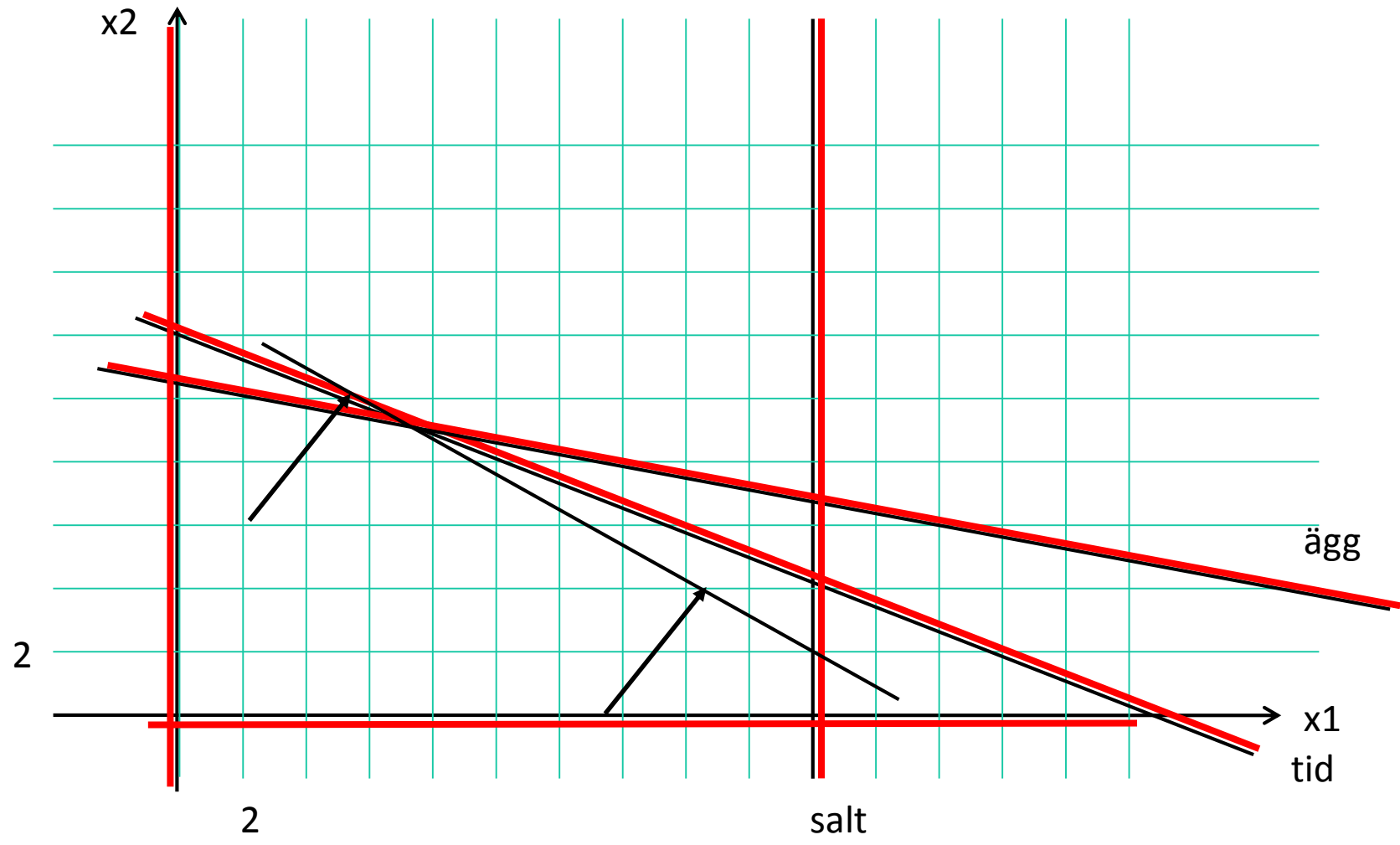


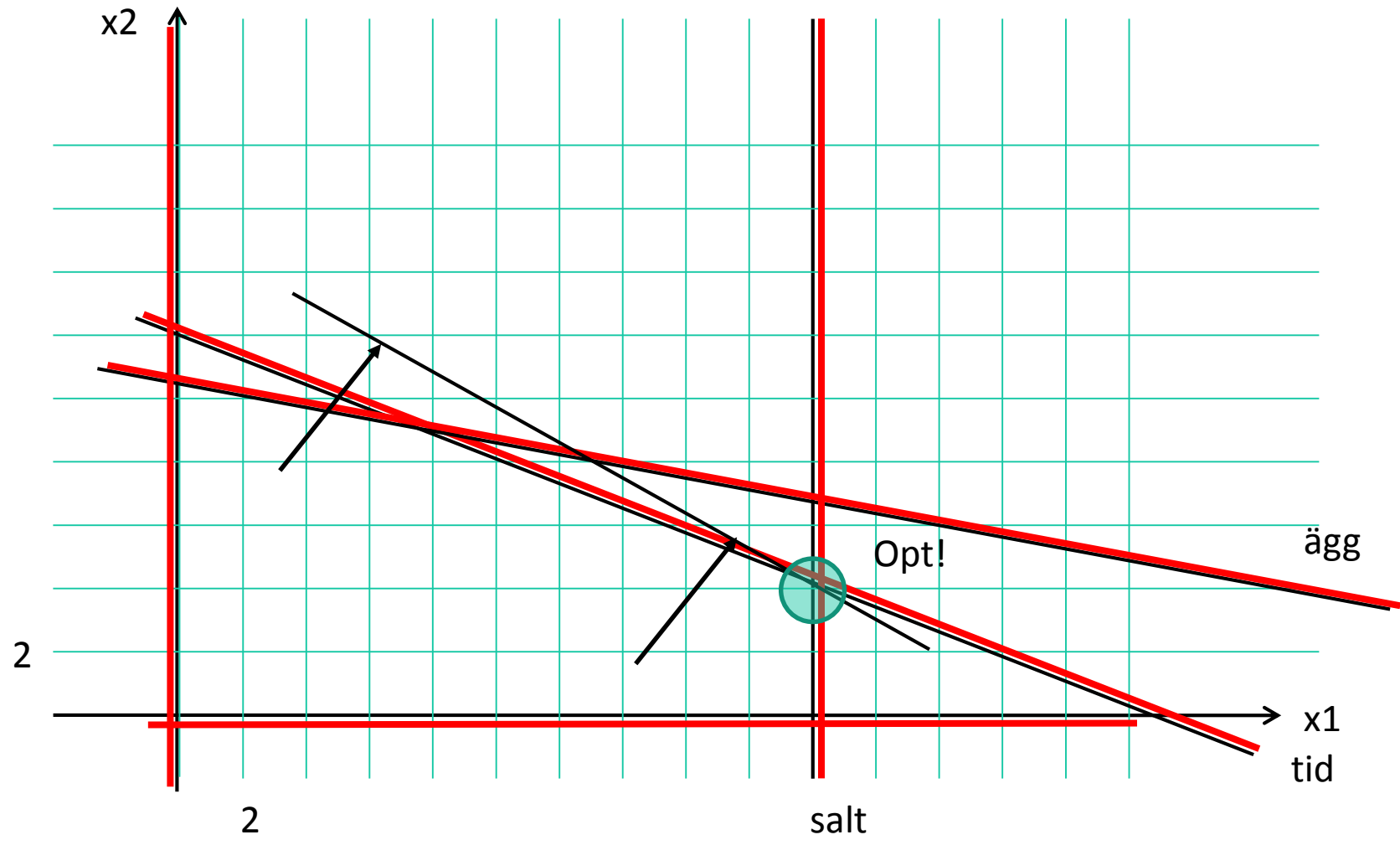




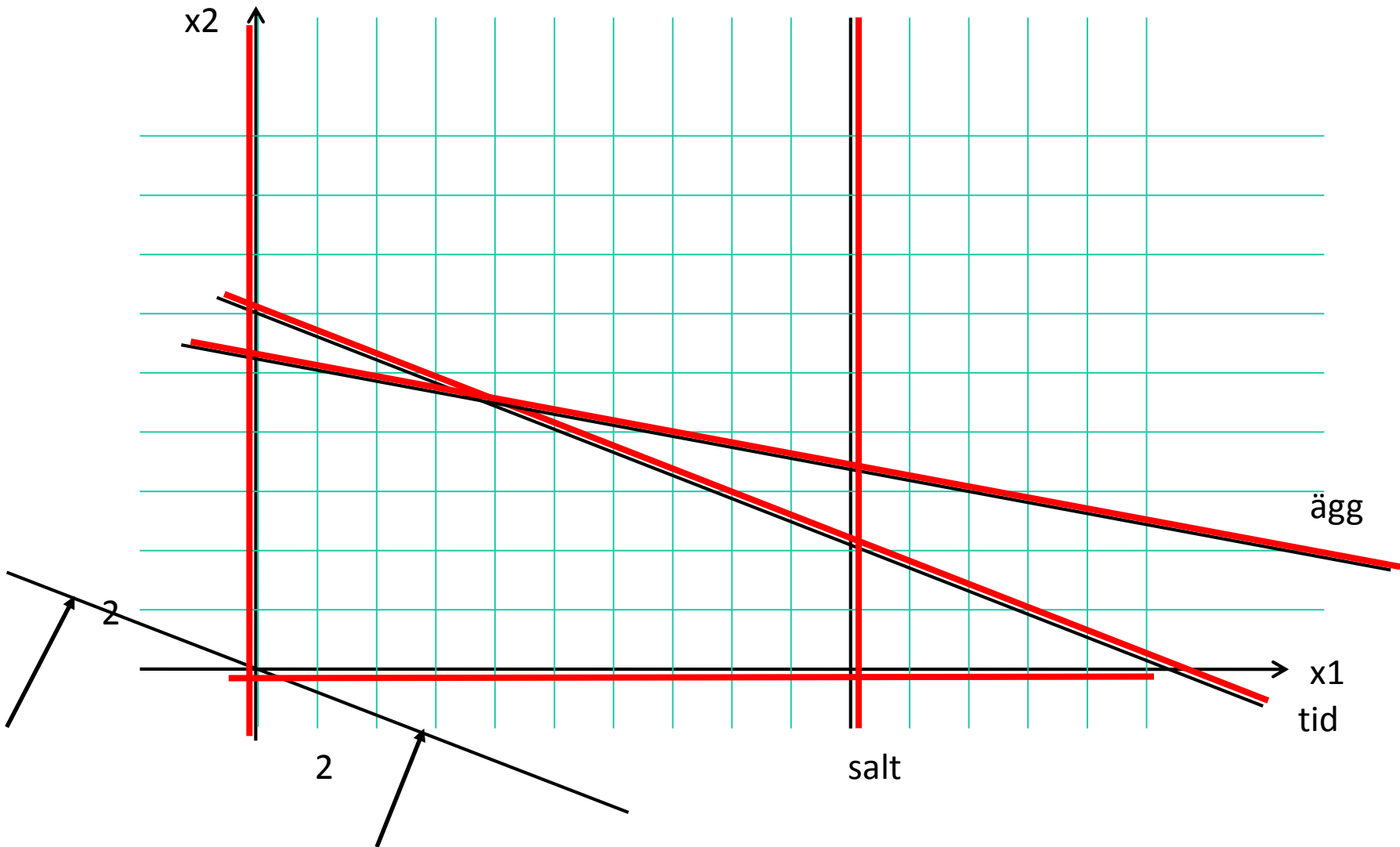


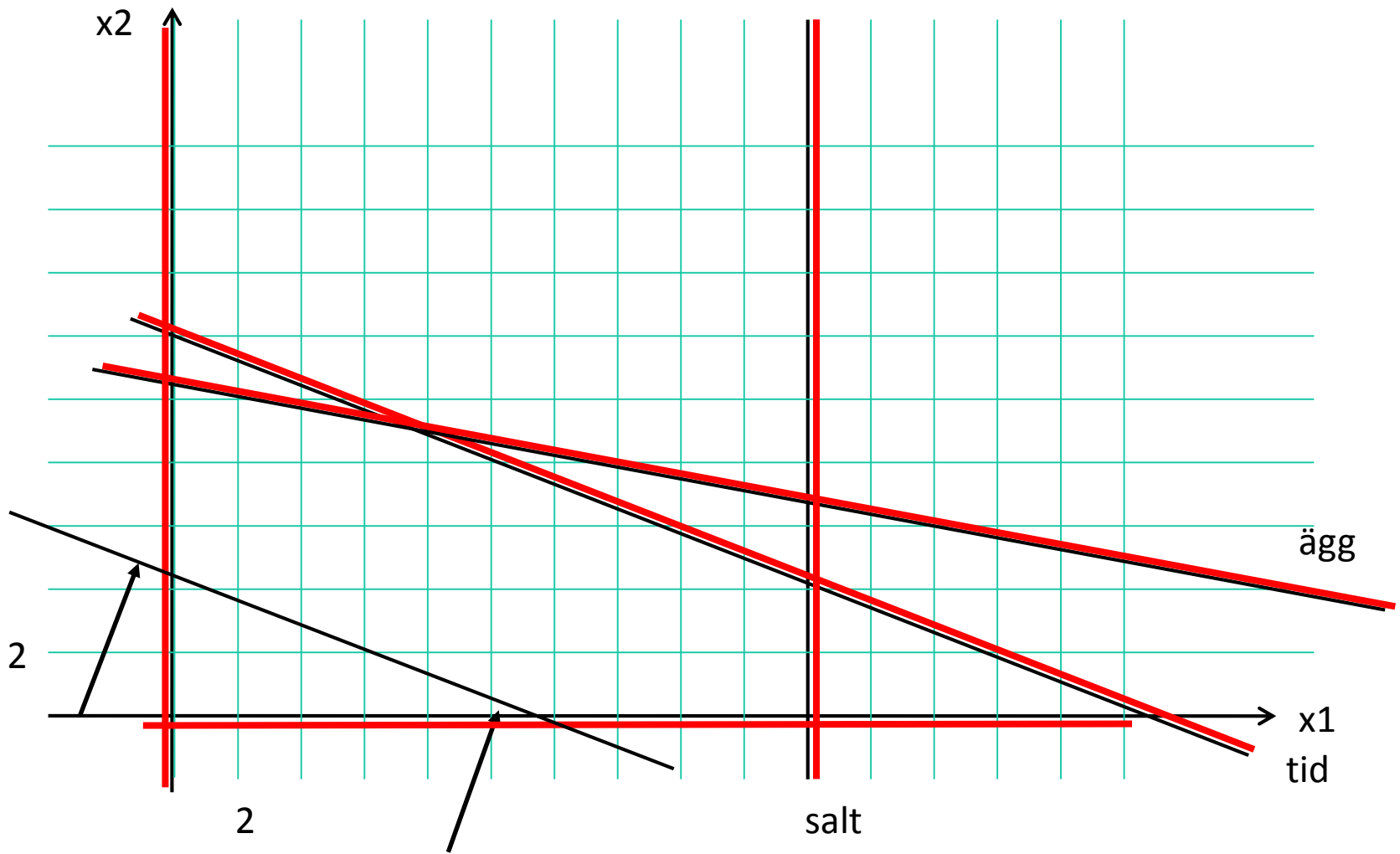


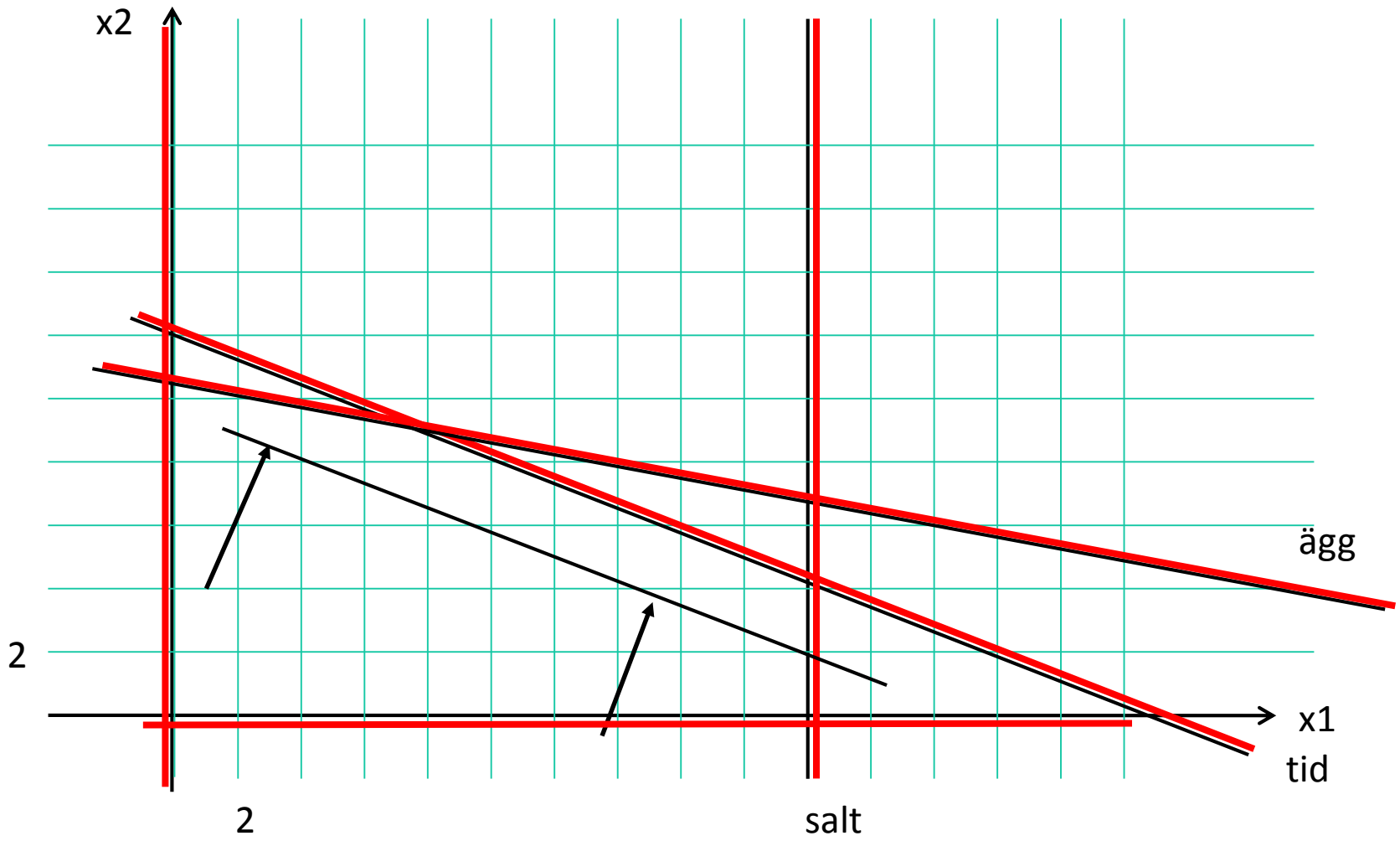


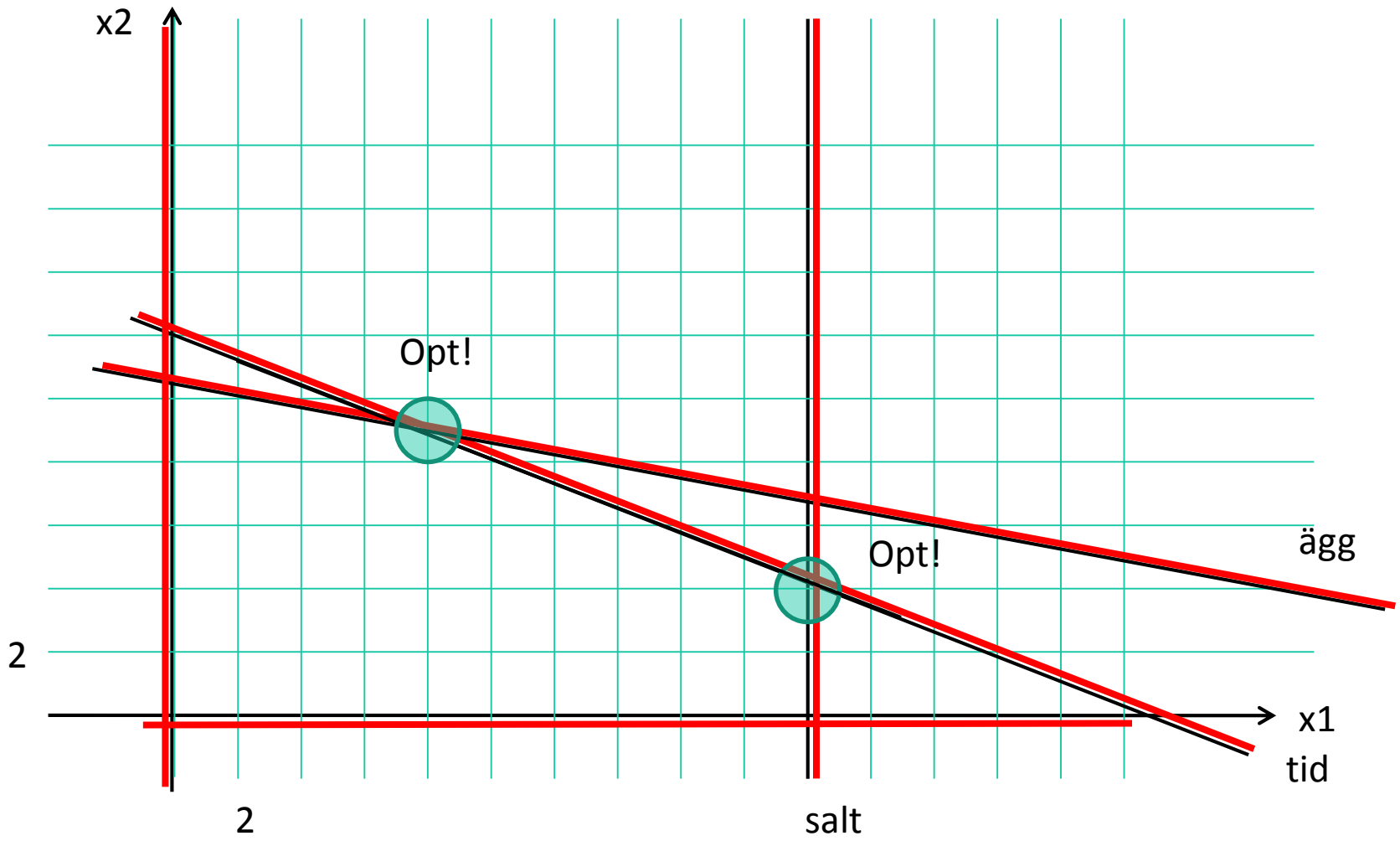


Vad händer om vi ändrar vinsten för en sockerkaka från 15 till 20 kronor styck?









Agenda

- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

LP-problem på standardform

- Standardform
 - Alla villkor likhet
 - Ev. inför s.k. slackvariabler
 - (med rätt tecken)
 - Ofta betecknas de "s", men det är ingen regel – bara tydlighet
 - Alla variabler ickenegativa
 - Ev. variabelsubstitution
 - Alla högerled ickenegativa
 - Ev. Teckenbyt

- Exempel

$$\max z = 7x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$\text{då} \quad x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$$

Algebraisk formulering av LP

$$\begin{aligned}
 \max z &= 3x_1 + x_2 \\
 \text{då} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\
 x_1 + x_2 + x_4 &= 5 \\
 x_2 + x_5 &= 3 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agenda

- Tolkning av utdata
- Intro lösningsmetoder
- Linjära optimeringsproblem (LP) på standardform
- Algebraisk formulering av LP
- Konvexitet

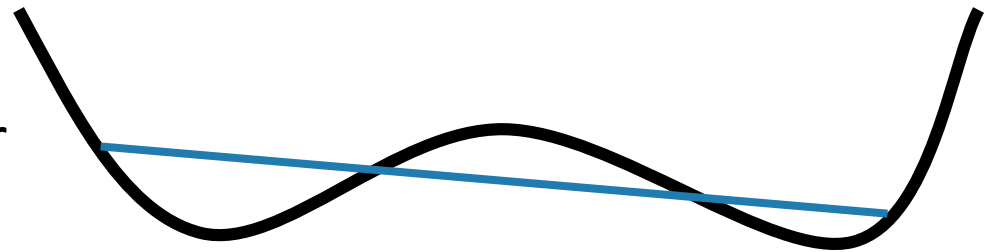
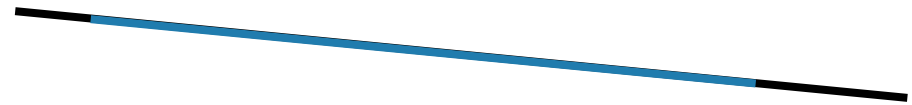
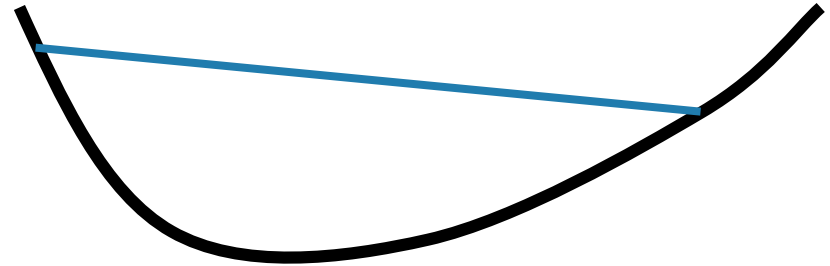
Lokala och globala optima

$$\begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{då } x \in X \end{array}$$

- x^k är ett lokalt optimum (min) om $f(x^k) \leq f(x)$ för alla x tillräckligt nära x^k
- \hat{x} är ett globalt optimum (min) om $f(\hat{x}) \leq f(x)$ för alla $x \in X$
- I ett konvext problem är varje lokalt optimum också ett globalt optimum
 - Konvex funktion över ett konvext område
 - Konvexa problem trevligare än andra

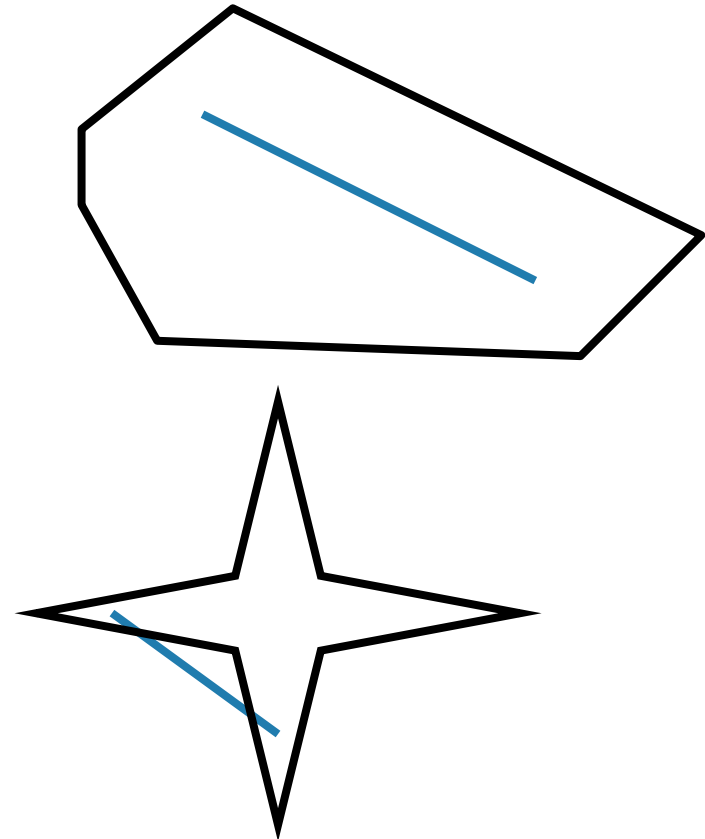
Konvexa funktioner

- Konvex om
 - Varje rät linje mellan två punkter på funktionskurvan, ligger på eller ovanför kurvan
- Ej konvex om
 - Någon rät linje mellan några punkter på funktionskurvan, ligger under kurvan



Konvexa mängder

- Konvex om
 - Varje rät linje mellan två punkter i mängden, ligger i mängden
- Ej konvex om
 - Någon rät linje mellan några punkter på mängden, går utanför mängden
- Skärning av konvexa mängder utgör en konvex mängd



Linjärprogrammeringens grunder

- Linjära bivillkor ger konvexa mängder
- Tillåtna området blir konvext
- Konvex målfunktion
- Konvext problem
 - Lokalt opt är globalt opt!
 - (Smart) lokal sökmetod funkar bra
 - Simplexmetoden

Men hur skall denna sökning gå till?

Linjärt problem

$$\begin{array}{l} \max f(x) \\ \text{då } g_i(x) \leq b_i, i = 1 \dots n \end{array}$$

- Om

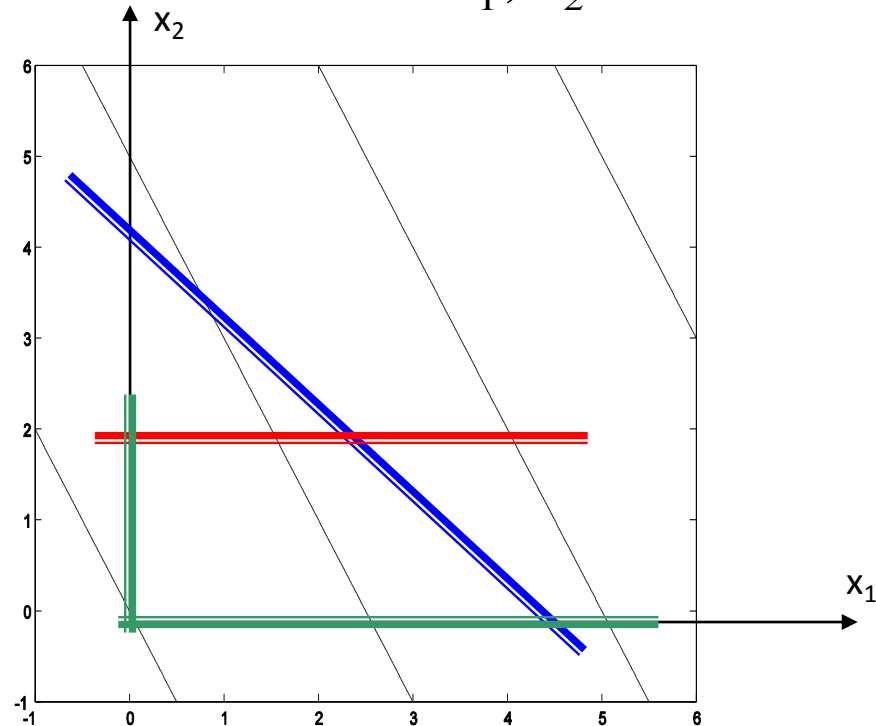
$$f(x), g_i(x), \forall i$$

är linjära

Konvext problem

-> Lokalt opt=globalt

$$\begin{array}{l} \max f(x) = 2x_1 + x_2 \\ \text{då } 2x_1 + 2x_2 \leq 9 \leftarrow \text{blue arrow} \\ \quad \quad \quad x_2 \leq 2 \leftarrow \text{red arrow} \\ \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \leftarrow \text{green arrow} \end{array}$$



Ickelinjärt problem

$$\max f(x)$$

$$\text{då } g_i(x) \leq b_i, i = 1 \dots n$$

$$\max f(x) = \sin(2x_1) + \sin(x_2) + (x_1 + x_2) / 5$$

$$\text{då } 2x_1 + 2x_2 \leq 9 \leftarrow$$

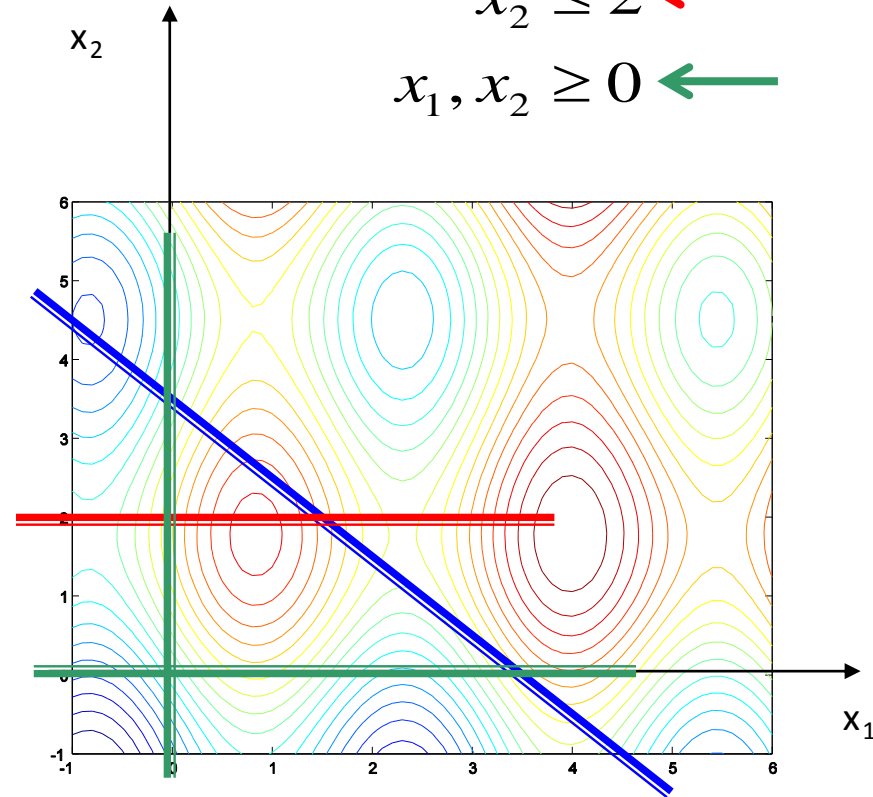
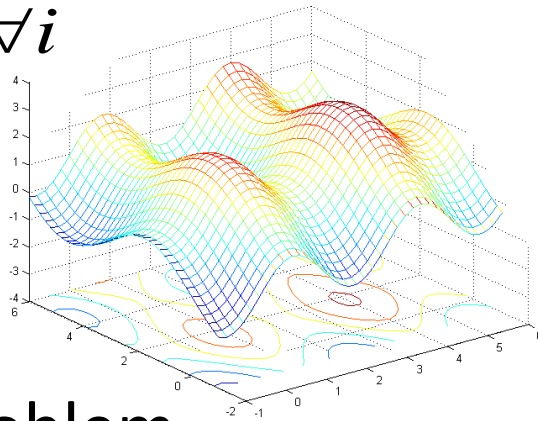
$$x_2 \leq 2 \leftarrow$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \leftarrow$$

- Om minst en av

$$f(x), g_i(x), \forall i$$

är ickelinjär



Ickekonvext problem

-> Lokalt opt=????

Diskreta problem

$$\begin{array}{l} \max f(x) \\ \text{då } g_i(x) \leq b_i, i = 1 \dots n \end{array}$$

$$\max f(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{då } 2x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_2 \leq 2$$

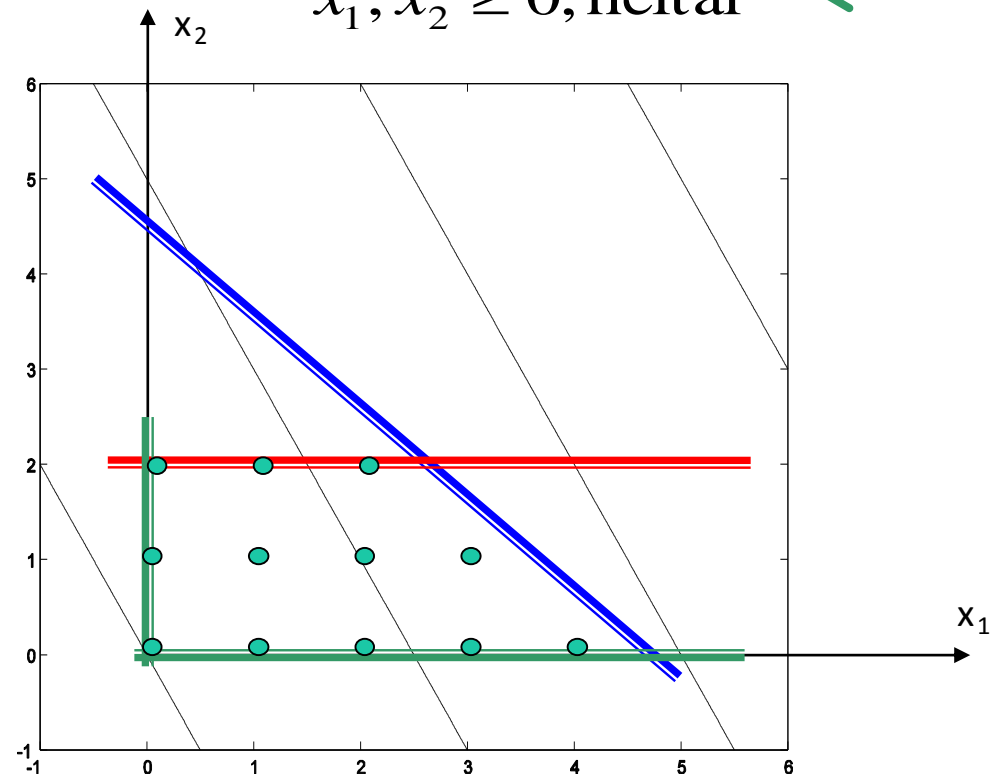
$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ heltal}$$



- Om dessutom
 x
är diskreta (tex. heltal)

Vad betyder "lokal"?

Lokalt opt=???



www.liu.se