Analys III, TNA006

1. Bestäm stationära punkter, $\nabla f = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} f'_x &= 2x(x+y) + x^2 + y^2 - 12 = 0 \\ f'_x &= 2y(x+y) + x^2 + y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

Differensen ger att $2(x-y)(x+y) = 0$. Vilket ger att antingen är $y = x$ eller $y = -x$.

y=x: Då har vi att $6x^2 - 12 = 0$ vilket ger oss att $x = \pm\sqrt{2}$. Punkter $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

y=-x Då har vi att $2x^2 - 12 = 0$ vilket ger oss att $x = \pm\sqrt{6}$. Punkter $\pm(\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

Vi har fyra stationära punkter, återstår att undersöka om dessa är extrempunkter. Andraderivator blir:

$$f''_{xx} = \cdots = 6x + 2y, \quad f''_{xy} = \cdots 2x + 2y, \quad f''_{yy} = 2x + 6y.$$

Den kvadratiska formen Q i intressanta punkter blir:

$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$Q(h,k) = 8\sqrt{2}\left(h^2 + hk + k^2\right) = 8\sqrt{2}\left((h + \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$$

Vilket är en positivt definit kvadratisk form. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ är ett lokalt minima.

$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:

$$Q(h,k) = -8\sqrt{2}\left(h^2 + hk + k^2\right) = -8\sqrt{2}\left((h + \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$$

Vilket är en negativt definit kvadratisk form. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ är ett lokalt maxima.

$(\sqrt{6}, -\sqrt{6})$:

$$Q(h,k) = 4\sqrt{6}\left(h^2 - k^2\right)$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form. $(\sqrt{6}, -\sqrt{6})$ är en sadelpunkt.

$(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$:

$$Q(h,k) = 4\sqrt{6}\left(-h^2 + k^2\right)$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form. $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ är en sadelpunkt.

Svar: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ är ett lokalt minima, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ är ett lokalt maxima, $\pm(\sqrt{6}, -\sqrt{6})$ är sadelpunkter.

2. Vi undersöker kvoten

$$\rho(h,k) = \frac{f(1+h,-1+k) - f(1,-1) - \left[hf'_x(1,-1) + kf'_y(1,-1)\right]}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{-3h+2k+3hk-h^2+h^2k-[-3h+2k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{3hk-h^2+h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

f är differentierbar om $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$, vi undersöker gränsvärdet med hjälp av polära koordinater.

$$\rho(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{3r^2\cos\theta\sin\theta - r^2\cos^2\theta + r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r} =$$

$$= r\cos\theta\,(3\sin\theta - \cos\theta + r\cos\theta\sin\theta) \to 0 \text{ då } r \to 0$$

Då uttrycket ovan (bortsett från det första r) är en begränsad funktion då r begränsad. Vilket visar att f är differentierbar.

3. Vi gör ett variabelbyte, låt $u = xy$ och $v = \frac{y}{x^2}$, vilket är tillåtet då området ligger i första kvadranten och $x \neq 0$. Området $E = \{(u,v) : 1 \le u \le 2,\ 2 \le v \le 4\}$. Funktionaldeterminanten:

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2}$$

Vi får:

$$\iint_D \frac{y^3}{x^3} dxdy = \iint_E \frac{y^3}{x^3} \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \iint_E \frac{y^3}{x^3}\frac{x^2}{3y} dudv = \frac{1}{3}\iint_E \frac{y^2}{x} dudv =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_E uv dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 udu \int_2^4 vdv = \cdots = 3$$

Svar: $\iint_D \frac{y^3}{x^3} dxdy = 3$.

4. Området är kompakt, och f är kontinuerlig, således kommer största och minsta värde att antas.

Stationära punkter: $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} f'_x &= (y-1-(xy-x))e^{-x+2y} = (x+y-1-xy)e^{-x+2y} = 0 \\ f'_y &= (x+2(xy-x))e^{-x+2y} = x(2y-1)e^{-x+2y} = 0 \end{cases}$$

Ur andra ekvationen får vi att $x = 0$ eller $y = 1/2$.

$x = 0$: Då ger första ekvationen att $y = 1$. En punkt $(0, 1)$, dock ej i området.

$y = \frac{1}{2}$: Då ger första ekvationen att $x = 1$. En punkt $(1, \frac{1}{2})$

Singulära punkter: Saknas då ∇f är definierad överallt.

Randen: Består av tre linjestycken.

(a) $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$
$g_1(x) = f(x, 0) = -xe^{-x}$. Vi har att g_1 har max/min antingen i ändpunkter eller där $g_1' = (-1 + x)e^{-x} = 0$ d.v.s. då $x = 1$. Vi har då punkter $(1, 0)$ och ändpunkter.

(b) $x = 2$, $0 \leq y \leq 1$
$g_2(y) = f(2, y) = (2y - 2)e^{-2+2y}$. Vi har att g_2 har max/min antingen i ändpunkter eller där $g_2' = (4y - 2)e^{2-2y} = 0$ d.v.s. då $y = \frac{1}{2}$. Vi har då punkter $(2, \frac{1}{2})$ och ändpunkter.

(c) $y = \frac{x}{2}$, $0 \leq x \leq 2$.
$g_3(x) = f(x, \frac{x}{2}) = \frac{x^2}{2} - x$, Vi har att g_3 har max/min antingen i ändpunkter eller där $g_3' = x - 1 = 0$ d.v.s. då $x = 1$. Vi har då punkter $(1, \frac{1}{2})$ och ändpunkter.

Vi har nu att största och minsta värdet finns bland följande värden

$$f(1,0) = -e^{-1}, \quad f(2, \frac{1}{2}) = -e^{-1} \quad f(1, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$$f(0,0) = 0, \quad f(2,0) = -2e^{-2}, \quad f(2,1) = 0$$

Svar: Största värdet är 0, och minsta värdet är $-\frac{1}{2}$.

5. Låt $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4 - 1$ och $g(x, y, z) = x + y + z - 1$. Vi har

$$\frac{d(f, g)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 3y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3y^2.$$

Och i punkten $(1, -1, 1)$ får vi att funktionaldeterminanten är $-1 \neq 0$ således är det möjligt i en omgivning av punkten att lösa ut x och y som funktioner av z.

Vi vet då också att $x(1) = 1$ och $y(1) = -1$.

För att bestämma derivatorna deriverar vi implicit med avseende på z:

$$\begin{cases} 2xx' + 3y^2y' + 4z^3 & = & 0 \\ x' + y' + 1 & = & 0 \end{cases}$$

Nu i den givna punkten har vi

$$\begin{cases} 2x' + 3y' + 4 &= 0 \\ x' + y' + 1 &= 0 \end{cases}$$

Ur detta har vi att $y'(1) = -2$ och $x'(1) = 1$.

Svar: Det är möjligt i en omgivning av $(1, -1, 1)$ att lösa ut x och y som funktioner av z. $x(1) = 1$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -2$ och $x'(1) = 1$.

6. Givet att $z \in \mathcal{C}^2$, lös den partiella differentialekvationen

$$xz''_{xx} - z'_x - 4x^3 z''_{yy} = 4x^5.$$

genom att utnyttja variabelbytet $u = x^2 - y$, $v = x^2 + y$.

Kedjeregeln ger att

$$z'_x = 2x(z'_u + z'_v)$$
$$z''_{xx} = 2(z'_u + z'_v) + 4x^2\left(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}\right)$$
$$z''_{yy} = z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}$$

I differentialekvationen:

$$xz''_{xx} - z'_x - 4x^3 z''_{yy} =$$

$$x\left(2(z'_u + z'_v) + 4x^2\left(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}\right)\right) - 2x(z'_u + z'_v) - 4x^3\left(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}\right) = 16x^3 z''_{uv} = 4x^5.$$

Vi har ekvationen $8z''_{uv} = 2x^2$ eller $8z''_{uv} = u + v$. Lösningar är $z = \frac{u^2v}{16} + \frac{uv^2}{16} + g(v) + h(u)$. Åter till x och y:

Svar: Lösningar är $z(x, y) = \frac{(x^2-y)^2(x^2+y)}{16} + \frac{(x^2-y)(x^2+y)^2}{16} + g(x^2 - y) + h(x^2 + y)$.

7. Vi byter till cylinderkoordinater, området beskrivs då av att $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi \leq 2\pi$ och $0 < z < \rho$

$$\iiint_D \frac{1}{4 - x^2 - y^2} dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho} \frac{1}{4 - \rho^2}\rho dz\right) d\varphi\right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{4 - \rho^2} d\varphi\right) d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{4 - \rho^2} d\rho = 2\pi \int_0^1 -1 + \frac{4}{4 - \rho^2} d\rho = 2\pi \int_0^1 -1 + \frac{1}{2 - \rho} + \frac{1}{2 + \rho} d\rho =$$

$$= 2\pi \Big[-\rho - \ln(2 - \rho) + \ln(2 + \rho)\Big]_0^1 = 2\pi\Big(-1 + \ln 3 + \ln 2 - \ln 2\Big) = 2\pi(-1 + \ln 3)$$

Svar:

$$\iiint_D \frac{1}{4 - x^2 - y^2} dxdydz = 2\pi(-1 + \ln 3)$$