Svar till Analys III, TNA006, 170104

1. (a) Vi har att

$$f(1,0)=1, \quad f'_x=2(x{+}2y),\ f'_x(1,0)=2, \quad f'_y=4(x{+}2y),\ f'_y(1,0)=4$$

Vi studerar

$$\rho(h,k)=\frac{f(1+h,k)-f(1,0)-\left[hf'_x(1,0)+kf'_y(1,0)\right]}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$\frac{h^2+4k^2+4hk+2h+4k+1-1-[2h+4k]}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h^2+4k^2+4hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

För att avgöra om $\rho(h,k)\to 0$ då $(h,k)\to(0,0)$ byter vi till polära koordinater, $h=r\cos\theta$, $k=r\sin\theta$:

$$\rho(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{r^2\cos\theta^2+4r^2\sin\theta^2+4r^2\cos\theta\sin\theta}{r}=$$

$$r\left(\cos\theta^2+4\sin\theta^2+4\cos\theta\sin\theta\right)=r(\text{begränsad funktion})$$

vilket ger att $\rho\to 0$ då $r\to 0$. Således är f differentierbar i punkten $(1,0)$.

(b) Tangentplanet blir

$$z=1+2(x-1)+4y.$$

2. Ytan har en tangentvektor

$$\nabla(x+y^2+z^4)=(1,2y,4z^3)$$

Om planet skall kunna tangera ytan måste normalerna vara parallella

$$(2,2,1)=\lambda(1,2y,4z^3)$$

Vilket ger att $\lambda=2$, $y=\frac{1}{2}$ och $z=\frac{1}{2}$. Om punkten skall ligga på ytan så får vi villkoret $x+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=1$ och $x=\frac{11}{16}$. Konstanten a måste då vara

$$a=\frac{11}{8}+1+\frac{1}{2}=\frac{11+8+4}{8}=\frac{23}{8}$$

3.

$$\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\sqrt{x^2+y^2}dy\right) dx =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x}{3}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4 dx =$$

$$\left[\frac{2\sqrt{2}-1}{15}x^5\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}$$

4. **Stationära punkter:**

$$\begin{cases} f'_x &= 1-3x^2y^4 \\ f'_y &= -4x^3y^3 \end{cases}$$

Vi ser att den ena ekvationen ger att $xy = 0$ men det ger också att $1 = 0$ så det finns inga stationära punkter.

Singulära punkter: Saknas då ∇f är definierad i $\mathbb{R}^2$.

Randen: Här är $x^2+y^4 = 1$, så vi har att $y^4 = 1-x^2$ och $-1 \leq x \leq 1$. Vi studerar

$$g(x) = x - x^3(1-x^2) = x^5 - x^3 + x, \quad g'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$$

$$g'(x) = 5(x^4 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}) = 5((x^2 - \frac{3}{10})^2 - \frac{9}{100} + \frac{1}{5}) = 5((x^2 - \frac{3}{10})^2 + \frac{11}{100})$$

Vi ser att $g'(x) > 0$.

De enda intressanta punkterna är alltså ändpunkterna: $(-1,0)$ och $(1,0)$.

$$f(-1,0) = -1, \quad f(1,0) = 1.$$

5.

$$\iiint_D dxdydz = \iint_{D_1} \left(\int_0^{1-z} dy\right) dxdz =$$

där $D_1 = \{(x,z): \ x^2 \leq z \leq 1\}$.

$$\iint_{D_1} [y]_0^{1-z} dxdz = \iint_{D_1} (1-z)dxdz = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 (1-z)dz\right) dx$$

$$\int_{-1}^1 \left[z - \frac{z^2}{2}\right]_{x^2}^1 dx = \int_{-1}^1 (\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2})dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{15}.$$

6. För att se om funktionen $z(x, y)$ definieras av ekvationen ser vi på F_z' då

$$F(x, y, z) = z^3 + z(y^2 + 1) + x^3 - 3x + y^2 - 8$$

då är $F_z' = 3z^2 + y^2 + 1 > 0$ således finns funktionen z för alla x och y där ekvationen kan lösas.

Vi bestämmer de partiella derivatorna till $z(x, y)$ genom implicit derivering: M.a.p. x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z^3 + z(y^2 + 1) + x^3 - 3x + y^2 - 8\right) = \frac{\partial}{\partial x}0$$

$$3z^2 z_x' + z_x'(y^2 + 1) + 3x^2 - 3 = 0$$

Vi får att

$$z_x' = \frac{3 - 3x^2}{3z^2 + y^2 + 1}$$

$z_x' = 0$ ger punkterna $x = \pm 1$.

M.a.p. y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^3 + z(y^2 + 1) + x^3 - 3x + y^2 - 8\right) = \frac{\partial}{\partial x}0$$

$$3z^2 z_y' + z_y'(y^2 + 1) + 2yz + 2y = 0$$

Vi får att

$$z_y' = -\frac{2y(z + 1)}{3z^2 + y^2 + 1}$$

$z_y' = 0$ ger punkterna $y = 0$ eller $z = -1$.

Undersök vilka av punkterna som uppfyller ekvationen:

- Om $y = 0$ och $x = 1$

  $$z^3 + z - 10 = 0$$

  En lösning är $z = 2$. Vi ser att $z^3 + z - 10$ är strängt växande, derivatan är $3z^2 + 1 > 1$, det finns alltså endast ett nollställe. En stationär punkt $(1, 0)$

- Om $y = 0$ och $x = -1$

  $$z^3 + z - 6 = 0$$

  $g(z) = z^3 + z - 6$ är en strängt växande funktion som har exakt ett nollställe då $g(z) \to -\infty$ då $z \to -\infty$ och $g(z) \to \infty$ då $z \to \infty$. $(-1, 0)$ är en stationär punkt.

- Om $z = 1$ och $x = 1$
$$2y^2 - 8 = 0$$
Det ger att $y = \pm 2$. $(1, \pm 2)$ är en stationär punkt.
- Om $z = 1$ och $x = -1$
$$2y^2 - 4 = 0$$
Det ger att $y = \pm\sqrt{2}$. $(-1, \pm\sqrt{2})$ är en stationär punkt.

Vi har följande stationära punkter
$$(\pm 1, 0),\ (1, \pm 2),\ (-1, \pm\sqrt{2}).$$

7. Vi har att
$$\begin{cases} u + v &= \ln x \\ u - v &= \ln y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u &= \frac{1}{2}(\ln x + \ln y) \\ v &= \frac{1}{2}(\ln x - \ln y) \end{cases}$$
Kedjeregeln ger
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2x}z'_u + \frac{1}{2x}z'_v$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2y}z'_u - \frac{1}{2y}z'_v$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2x}z'_u + \frac{1}{2x}z'_v\right) = -\frac{1}{2x^2}z'_u - \frac{1}{2x^2}z'_v +$$
$$\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2x}\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$
$$-\frac{1}{2x^2}z'_u - \frac{1}{2x^2}z'_v + \frac{1}{4x^2}\left(z''_{uu} + z''_{uv}\right) + \frac{1}{4x^2}\left(z''_{vu} + z''_{vv}\right) =$$
$$-\frac{1}{2x^2}z'_u - \frac{1}{2x^2}z'_v + \frac{1}{4x^2}\left(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}\right)$$
ny
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z'_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2y}z'_u - \frac{1}{2y}z'_v\right) = -\frac{1}{2y^2}z'_u + \frac{1}{2y^2}z'_v +$$
$$\frac{1}{2y}\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{1}{2y}\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$
$$-\frac{1}{2y^2}z'_u + \frac{1}{2y^2}z'_v + \frac{1}{4y^2}\left(z''_{uu} - z''_{uv}\right) - \frac{1}{4y^2}\left(z''_{vu} - z''_{vv}\right) =$$
$$-\frac{1}{2y^2}z'_u + \frac{1}{2y^2}z'_v + \frac{1}{4y^2}\left(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}\right)$$

I PDEn

$$x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} + x z'_x - y z'_y =$$

$$-\frac{1}{2} z'_u - \frac{1}{2} z'_v + \frac{1}{4}\left(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}\right) + \frac{1}{2} z'_u + \frac{1}{2} z'_v - \frac{1}{4}\left(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}\right)$$

$$+\frac{1}{2} z'_u + \frac{1}{2} z'_v - \frac{1}{2} z'_u + \frac{1}{2} z'_v = z''_{uv} = 0$$

Vi har ekvationen $z''_{uv} = 0$ att lösa,

$$z''_{uv} = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_u = f(u) \quad \Rightarrow \quad z = F(u) + g(v)$$

Svar: Lösningar är

$$z = f(\ln x + \ln y) + g(\ln x - \ln y).$$

där f och g är godtyckliga deriverbara funktioner.