Svar till analys III, TNA006, 160926

1. Vi söker först stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x &= (1-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f'_y &= -xye^{-(x^2+y^2)/2} \end{cases}$$

$\nabla f = \mathbf{0}$ ger att (då exponentialfunktionen aldrig noll)

$$\begin{cases} (1-x^2) &= 0 \\ -xye^{-(x^2+y^2)/2} &= 0 \end{cases}$$

Vilket ger lösningar $\pm(1,0)$.

Nu gäller det att avgöra om punkterna även är lokala extrempunkter:

Vi beräknar andraderivatorna:

$$\begin{cases} f''_{xx} &= (-2x - x(1-x^2))e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f''_{xy} &= -y(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ f''_{yy} &= (-x+xy^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{cases}$$

I punkten $(1,0)$ har vi:

$$f''_{xx}(1,0) = -2e^{-1/2}, \quad f''_{xy}(1,0) = 0, \quad , f''_{yy}(1,0) = -e^{-1/2}$$

Det ger oss en kvadratisk form

$$Q(h,k) = e^{-1/2}\big(-2h^2 - k^2\big)$$

som är en negativt definit kvadratisk form. Punkten $(1,0)$ är således ett lokalt max till funktionen f.

I punkten $(-1,0)$ har vi:

$$f''_{xx}(1,0) = 2e^{-1/2}, \quad f''_{xy}(1,0) = 0, \quad , f''_{yy}(1,0) = e^{-1/2}$$

Det ger oss en kvadratisk form

$$Q(h,k) = e^{-1/2}\big(2h^2 + k^2\big)$$

som är en positivt definit kvadratisk form. Punkten $(-1,0)$ är således ett lokalt min till funktionen f.

Svar: Funktionen f har två lokala extrempunkter, $(1,0)$ är ett lokalt max och $(-1,0)$ är ett lokalt min.

2. (a) Vi har att $f(0,-1)=1$,

$$f'_x = 2y-2x, \quad f'_x(0,-1) = -2, \quad f'_y(0,-1) = 2y+2x, \quad f'_y(0,-1) = -2$$

Tangentplanet är:

$$z = 1 - 2x - 2(y+1)$$

(b) Vi skall avgöra om $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

$$\rho(h,k) = \frac{f(h,-1+k) - f(0,-1) - \big[hf'_x(0,-1) + kf'_y(0,-1)\big]}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{(-1+k)^2 + 2h(-1+k) - h^2 - 1 - \big[-2h-2k\big]}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{1+k^2-2k-2h+2hk-h^2-1+2h+2k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{k^2+2hk-h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

För att avgöra gränsvärdet byter vi till polära koordinater:

$$\rho(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2(\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta)}{r} =$$

$$r\big(\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta - \cos^2\theta\big)$$

Från vilket vi får att $\rho(r\cos\theta, r\sin\theta) \to 0$ då $r \to 0$, eftersom det är en produkt där en faktor går mot noll medan den andra är begränsad, i intervallet $[-4,4]$.

Alltså är funktionen f differentierbar i punkten $(0,-1)$.

3. Vi använder kedjeregeln, och får att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -z'_u + z'_v,$$

Detta ger oss:

$$z'_x + z'_y = z'_u - z'_u + z'_v = z'_v = x - y = u$$

Vi skall alltså lösa $z'_v = u$ vilket ger att $z = uv + f(u)$. Lösningen får vi genom att återgå till xy.

Svar: Lösningen är $z = (x-y)y + f(x-y)$ där f är en godtycklig deriverbar funktion.

4. Låt $F(x, y, z) = xy - (x + y)z^2 + \sin z$ då är

$$F'_z = -2z(x + y) + \cos z, \quad F'_z 0, 0, 0 = 1.$$

$F'_z(0, 0, 0) \neq 0$ ger att det finns en sådan funktion.

För att bestämma derivator och funktionsvärden, ser vi först att $z(0, 0) = 0$, och deriverar implicit:

M.a.p. x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xy - (x + y)z^2 + \sin z\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(0\right).$$

Vilket ger

$$y - z^2 - 2(x + y)zz'_x + z'_x \cos z = 0$$

I punkten $(0, 0, 0)$ får vi $z'_x = 0$

M.a.p. y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy - (x + y)z^2 + \sin z\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(0\right).$$

Vilket ger

$$x - z^2 - 2(x + y)zz'_y + z'_y \cos z = 0$$

I punkten $(0, 0, 0)$ får vi $z'_y = 0$

Svar: Det finns en sådan funktion och $z(0, 0) = 0$, $z'_x = 0$ och $z'_y = 0$.