ITN
Linköpings universitet
Kontrollskrivning, KTR1

Hjälpmedel: Inga
2009–09–23 kl. $14^{00} - 16^{00}$

Analys III, TNA006

För att erhålla full poäng krävs väl motiverade lösningar, svar utan motivering ger alltid 0p.

---

1. Bestäm alla partiella derivator till och med ordning två för (6p)

$$f(x, y) = (x^2y + y^3)^4.$$

Svar:

$$f'_x(x, y) = 8xy\left(x^2y + y^3\right)^3, \quad f'_y(x, y) = 4\left(x^2 + 3y^2\right)\left(x^2y + y^3\right)^3$$

$$f''_{xx} = 48x^2y^2\left(x^2y + y^3\right)^2 + 8y\left(x^2y + y^3\right)^3$$

$$f''_{xy} = 24xy\left(x^2 + 3y^2\right)\left(x^2y + y^3\right)^2 + 8x\left(x^2y + y^3\right)^3$$

$$f''_{yy} = 12\left(x^2 + 3y^2\right)^2\left(x^2y + y^3\right)^2 + 24y\left(x^2y + y^3\right)^3$$

2. Beräkna riktnngsderivatan i riktningen $(1, 2, 2)$ av (6p)

$$f(x, y, z) = xyz$$

i punkten $(-1, 2, -3)$.

Svar: Riktningsderivatan är $-\frac{4}{3}$.

3. Visa att ekvationen $\sin xy - \ln(x + y) = 0$ lokalt kring punkten $(0, 1)$ definierar y som en deriverbar funktion av x. Beräkna också $\frac{dy}{dx}$ då $x = 0$. (6p)
Svar: $\frac{dy}{dx} = 0$ då $x = 0$.

4. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-funktioner $z(x, y)$ som löser den partiella differentialekvationen (6p)

$$z''_{xx} - 4z''_{xy} + 4z''_{yy} = 6y,$$

genom att övergå till variablerna $u = 2x + y$, $v = x$.

Svar: Ekvationen blir $z''_{vv} = 6u - 12v$. Lösningar är

$$z(x, y) = 3(2x+y)x^2 - 2x^3 + xg(2x+y) + h(2x+y) = 4x^3 + 3x^2y + xg(x+2y) + h(2x+y).$$