Svar till TNA006, 150824

1. Gradienten $\nabla f = (4x^3 - 4y, -4x + 4y)$, vi löser

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y &= 0 \\ -4x + 4y &= 0. \end{cases}$$

Vilket ger att $x = y$ och $4x(x^2 - 1) = 0$. Lösningar är $x = -1, 0, 1$. Stationära punkter är $\pm(1, 1)$ och $(0, 0)$.

För att avgöra karaktären ser vi på Taylorutvecklingen, andraderivator är

$$f''_{xx} = 12x^2, \quad f''_{xy} = -4, \quad f''_{yy} = 4.$$

Vi ser att den kvadratiska formen vi får av Taylorutvecklingen kommer att vara samma för $(1, 1)$ och $(-1, -1)$:

Punkterna $\pm(1, 1)$:

$$Q(h, k) = 12h^2 - 8hk + 4k^2 = 4\big(k - h\big)^2 + 8h^2$$

Vilket är en positivt definit kvadratisk form, punkterna $\pm(1, 1)$ är lokala minimipunkter.

Punkten $(0, 0)$:

$$Q(h, k) = -8hk + 4k^2 = 4\big(k - h\big)^2 - 4h^2$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form, punkten $(0, 0)$ är en sadelpunkt.

2. Givet nivåytan $z^2 - x^2y - xy = 0$.

   (a) Gradienten til $F(x, y, x) = z^2 - x^2y - xy$ är

   $$\nabla F(x, y, z) = (-2xy - y, -x^2 - x, 2z).$$

   En normalvektor till nivåytan $F(x, y, z) = 0$ i punkten $(1, 2, 2)$ är då $\nabla F(1, 2, 2) = (-6, -2, 4) = 2(-3, -1, 2)$. Tangentplanet är

   $$-3(x - 1) - (y - 2) + 2(z - 2) = 0.$$

   (b) En normalvektor till nivåytan i en punkt (x, y, z) ges av $\nabla F(x, y, z)$ om tangentplanet skall vara parallellt med $x + y = 0$ måste gradienten vara parallell med vektorn $(1, 1, 0)$.

Det ger oss att $z = 0$ och att $-2xy - y = x^2 - x$. Vi vet också att punkten skall ligga på ytan så $-x^2y - xy = 0$ (vi vet att $z = 0$). Vi har

$$-xy(x+1) = 0, \quad -2xy - y = x^2 - x$$

Vi har val $x = 0$, $x = -1$ eller $y = 0$. Vilket ger punkter $(0, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$.

3. Funktionen är kontinuerlig och området är kompakt, alltså antas största och minsta värde i området.

   Stationära punkter: $\nabla f = (2x - y - 1, -x + 2y - 1)$

$$\begin{cases} 2x - y - 1 &= 0 \\ -x + 2y - 1 &= 0 \end{cases}$$

   Ett linjärt ekvationssystem som har en lösning $(1, 1)$ vilket är en punkt som ej ligger i området.

   Randen, Vi har tre linjestycken,

   - $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$.
     $g_1(y) = f(0, y) = y^2 - y$ vi får $g_1' = 2y - 1$ derivatan är noll i $y = 1/2$. Vi har intressanta punkter här är $(0, -1)$, $(0, 1/2)$ och $(0, 1)$.
   - $y = x - 1$, $0 \leq x \leq 1$.
     $g_2(x) = f(x, x - 1) = x^2 - 3x + 2$, $g_2' = 2x - 3$, derivatan är noll i $x = \frac{3}{2}$, en punkt som inte ligger i intervallet. Vi får då en ny intressant punkt: $(1, 0)$.
   - $y = -x + 1$, $0 \leq x \leq 1$
     $g_3(x) = f(x, -x + 1) = 3x^2 - 3x$ och $g_3' = 6x - 3$, derivatan är noll i $x = 1/2$. Vi får då en ny intressant punkt: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   Jämför funtktionsvärden:

$$f(0, -1) = 2, \quad f(0, 1) = 0, \quad f(0, 1/2) = -\frac{1}{4}, \quad f(1, 0) = 1, \quad f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}.$$

   Största värdet är 2, minsta värdet är $-\frac{3}{4}$.

4. Låt $F(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^3 - yz + z^4$. Då $F_z' = 2x - y + 4z^3$ och $F_z'(1, 1, 1) = 5 \neq 0$ så definierar $F(x, y, z) = 4$ z som en $\mathcal{C}^1$-funktion av x och y i en omgivning av $(1, 1, 1)$.

Riktningen ges av $\nabla z(1,1) = (z'_x(1,1), z'_y(1,1))$ alltså är det dessa derivator vi får bestämma.

Derivera sambandet implicit m.a.p. x

$$2x + 2z + 2xz'_x - yz'_x + 4z^3 z'_x = 0$$

I punkten

$$4 + 5z'_x(1,1) = 0$$

Alltså är $z'_x(1,1) = -\frac{4}{5}$.

Derivera sambandet implicit m.a.p. y

$$2xz'_y + 3y^2 - z - yz'_y + 4z^3 z'_y = 0$$

I punkten

$$2 + 5z'_y(1,1) = 0$$

Alltså är $z'_y(1,1) = -\frac{2}{5}$.

Riktningen som funktionen $z(x,y)$ växer snabbast i är $(-2,-1)$.

5.

$$\iint_D (|x| + y)dxdy = 4\iint_{D_1} (|x|)dxdy + \iint_D ydxdy = 4\iint_{D_1} (x)dxdy =$$

på grund av att området D är symmetriskt och $|x|$ är en jämn funktion, och y är en udda funktion, D_1 är den del av D som ligger i första kvadranten. Efter byte till polära koordinater:

$$4\int_0^3 \Big(\int_0^{\pi/2} r^2 \cos\theta d\theta\Big) dr = 4\int_0^3 \big[r^2 \sin\theta\big]_0^{\pi/2} dr = 4\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^3 = 36.$$

6. Kedjeregeln ger att

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u + \frac{1}{y}z'_v.$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}z'_v$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\big(z'_u + \frac{1}{y}z'_v\big) = \frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$z''_{uu} + \frac{1}{y}z''_{uv} + \frac{1}{y}\left(z''_{vu} + \frac{1}{y}z''_{vv}\right) = z''_{uu} + \frac{2}{y}z''_{uv} + \frac{1}{y^2}z''_{vv}.$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\big(z'_u + \frac{1}{y}z'_v\big) = \frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{1}{y^2}z'_v =$$

$$-\frac{x}{y^2}z''_{uv} + \frac{1}{y}\left(-\frac{x}{y^2}z''_{vv}\right) - \frac{1}{y^2}z'_v = -\frac{x}{y^2}z''_{uv} - \frac{x}{y^3}z''_{vv} - \frac{1}{y^2}z'_v$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\big(-\frac{x}{y^2}z'_v\big) = -\frac{x}{y^2}\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{2x}{y^3}z'_v =$$

$$\frac{x^2}{y^4}z''_{vv} + \frac{2x}{y^3}z'_v$$

I den partiella differentialekvationen:

$$x^2\left(z''_{uu} + \frac{2}{y}z''_{uv} + \frac{1}{y^2}z''_{vv}\right) + 2xy\left(-\frac{x}{y^2}z''_{uv} - \frac{x}{y^3}z''_{vv} - \frac{1}{y^2}z'_v\right) + y^2\left(\frac{x^2}{y^4}z''_{vv} + \frac{2x}{y^3}z'_v\right) =$$

$$x^2z''_{uu} + \frac{2x^2}{y}z''_{uv} + \frac{x^2}{y^2}z''_{vv} - \frac{2x^2}{y}z''_{uv} - \frac{2x^2}{y^2}z''_{vv} - \frac{2x}{y}z'_v + \frac{x^2}{y^2}z''_{vv} + \frac{2x}{y}z'_v = x^2z''_{uu}$$

Alltså återstår

$$x^2z''_{uu} = \frac{x^3}{y}, \quad z''_{uu} = v.$$

Detta ger att $z = \frac{u^2v}{2} + ug(v) + h(v)$. Lösningar är

$$z(x,y) = \frac{x^3}{2y} + xg(\frac{x}{y}) + h(\frac{x}{y}).$$

7. Det är en generaliserad integral, men integranden är positiv, alltså kan vi beräkna de itererade integralerna om de existerar så är den generaliserade integralen konvergent.

$$\iint_D \frac{1}{x(1+xy)}dxdy = \int_1^\infty \big(\int_x^\infty \frac{1}{x(1+xy)^2}dy\big)dx = \int_1^\infty \left[\frac{1}{x^2(1+xy)}\right]_x^\infty dx =$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}dx = \left[-\frac{1}{x} - \arctan x\right]_1^\infty = -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4}$$

Integralen är konvergent och

$$\iint_D \frac{1}{x(1+xy)^2}dxdy = 1 - \frac{\pi}{4}.$$