

TNSL05 – Optimering, Modellering och Planering

Föreläsning 10

Agenda

- Kursens status
- Repetition – Flödesnätverk
- Optimalitetsvillkor – LP och Minkostandsflöde (MKF)
- Nätverkssimplex
- Känslighetsanalys
- Exempel: MKF och Nätverkssimplex

Kursens status

- Föreläsning 10/11!
- Gruppuppgifter:
 - Gruppuppgift 1:
 - Alla har redovisat.
 - Gruppuppgift 2:
 - Alla har redovisat
 - Gruppuppgift 3:
 - På gång. Observera att det stått två olika datum för inlämningen. Tolka till er fördel! (Men det kan ju vara trevligt att lämna in innan julen, ändå...)
- Laborationsmomenten:
 - Alla moment avklarade. Rapportskrivandet pågår.
 - Om er modell inte funkar: kom till mig eller Nils!

Kursens status

- Tidigare tentor från 2015 och framåt ligger ute på Lisam nu.
- Räkna så många/få ni vill...
- Det kommer att komma ut information om när jag/Nils kommer att vara tillgängliga för frågor inför tentan. Vi åker båda iväg över julen, kommer tillbaka i början av januari.

Agenda

- Kursens status
- Repetition – Flödesnätverk
- Optimalitetsvillkor – LP och Minkostandsflöde (MKF)
- Nätverkssimplex
- Känslighetsanalys
- Exempel: MKF och Nätverkssimplex

Flödesnätverk (repetition)

- Definiera
 - x_{ij} = flödet på båge (i,j) från nod i till nod j
 - Nodstyrka
 - $d_i = \sum_{j|b_{ji} \in B} x_{ji} - \sum_{j|b_{ij} \in B} x_{ij} = \text{inflöde-utflöde}$
 - Om $d_i < 0$, i är en **källa**
 - Om $d_i > 0$, i är en **sänka**
 - Om $d_i = 0$, i är en **mellannod**
- Minkostnadsflöde:
 - Givet ett nätverk, finn ett flöde med minimal kostnad så att givna käll- och sänkstyrkor på noder uppfylls, och så att kapacitetsbegränsningar på bågar inte överskrids.

Agenda

- Kursens status
- Repetition – Flödesnätverk
- Optimalitetsvillkor – LP och Minkostandsflöde (MKF)
- Nätverkssimplex
- Känslighetsanalys
- Exempel: MKF och Nätverkssimplex

Optimalitetsvillkor, LP

- Minns en optimal simplextablå, slackvariabler och reducerade kostnaden
 - Vad är reducerade kostnaden för en variabel som har ett värde? / Vad står i målfknraden för basvariabler?
 - 0!
 - Om en variabel har en reducerad kostnad (dvs har ett värde i målfknraden), vilken sorts variabel är det, och vilket värde har variabeln?
 - Icke-basvariabel! De har värdet 0 per definition.
- → Optimalitetsvillkor:
 - (reducerad kostnad)*(variabelvärde)=0
 - + tillåtenhet.
 - + rätt tecken på reducerade kostnader

Koppling mellan LP och MKF

- Baslösning i LP
 - Motsvaras av Bastråd i Minkostnadsflöde
- Basvariabel i LP – Kan vara skild från 0
 - Motsvaras av basbåge i Minkostnadsflöde
 - Kan ha vilket (tillåtet) flöde som helst
- Icke-basvariabel i LP – Måste vara 0
 - Motsvaras av icke-basbåge i Minkostnadsflöde
 - Måste ha ett flöde på undre ELLER övre gränsen

Identifiera bassträd från från optimalitetsvillkor

- Optvillkor:

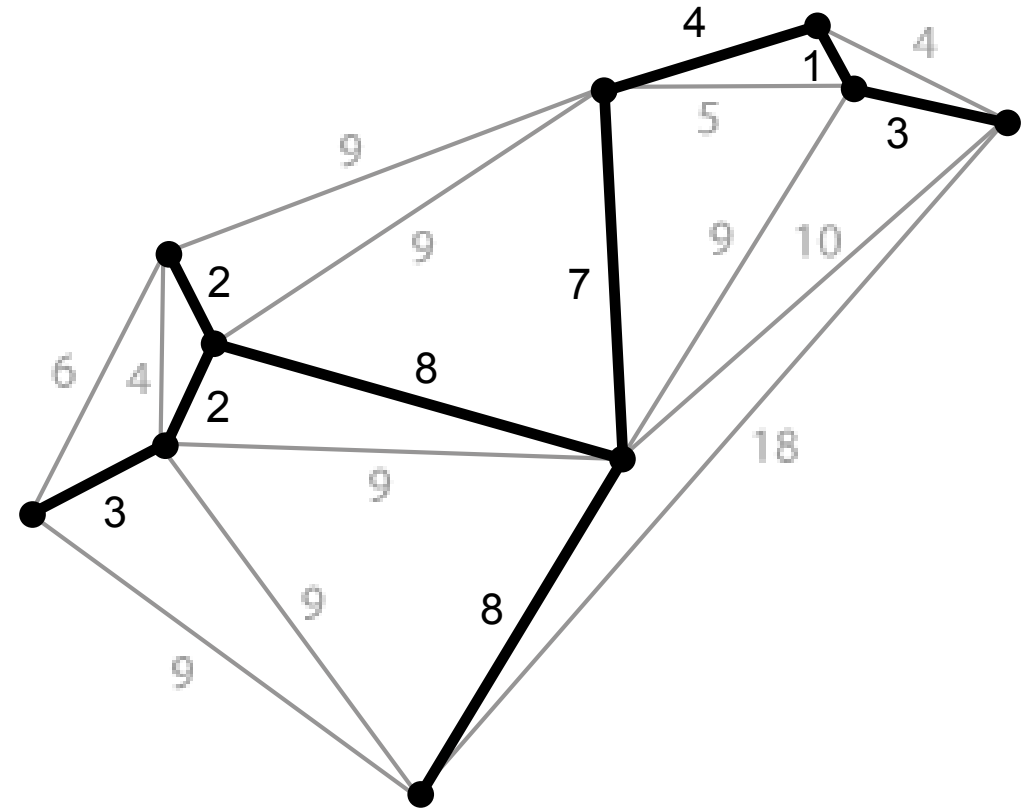
$x_{ij} = l_{ij} \implies \bar{c}_{ij} \geq 0$	$\bar{c}_{ij} > 0 \implies x_{ij} = l_{ij}$
$x_{ij} = u_{ij} \implies \bar{c}_{ij} \leq 0$	$\bar{c}_{ij} < 0 \implies x_{ij} = u_{ij}$
$l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \implies \bar{c}_{ij} = 0$	$\bar{c}_{ij} = 0 \implies l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

- Antag n noder i problemet
- Om flödet ligger strikt mellan undre & övre gräns
 - Bågen måste vara en basbåge
 - Per definition är reducerade kostnaden = 0 för basbågar

- Om antal bågar strikt mellan undre & övre gräns (och alla flöden tillåtna)
 - Fler än $n-1$; ej tillåtet basflöde
 - Exakt lika med $n-1$; Om bågarna bildar ett uppspannande träd, då har vi basflöde
 - Färre än $n-1$
 - Lägg till (valfria) bågar, så att ett uppspannande träd bildas
 - Dessa är också basbågar

Uppspännande träd, repetition

”grafens alla noder finns representerade utan några cykler”



Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x		
1			
2			
3			

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x		
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning		
2			
3			

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x		
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning		
2	Bestäm steglängd		
3			

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x		
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning		
2	Bestäm steglängd		
3	Uppdatera x och repetera		

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning		
2	Bestäm steglängd		
3	Uppdatera x och repetera		

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	
2	Bestäm steglängd		
3	Uppdatera x och repetera		

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	
3	Uppdatera x och repetera		

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	Tillåtet (bas)flöde, basträd
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	Tillåtet (bas)flöde, basträd
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	Inkommande basbåge
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	

Sökmeter

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	Tillåtet (bas)flöde, basträd
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	Inkommande basbåge
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	Utgående basbåge
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	

Sökmetoder

Steg	Allmänt	Simplex	Simplex, nätverk
0	Utgå från en tillåten lösning, x	Tillåten baslösning	Tillåtet (bas)flöde, basträd
1	Bestäm tillåten och förbättrande sökriktning	Inkommande variabel	Inkommande basbåge
2	Bestäm steglängd	Utgående variabel	Utgående basbåge
3	Uppdatera x och repetera	Uppdatera simplextablå, upprepa	Uppdatera flöden, upprepa

Algoritm, MKF

1. Antag tillåtet flöde och basträd
 - Identifiera basbågar, genom att kolla flödet på alla bågar
 - $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow$ båge (i, j) är en basbåge
 - Ev. komplettera till ett basträd
2. Beräkna reducerad kostnad
 - Börja med att beräkna nodpriser
 - Sätt t.ex. $y_1 = 0$
 - Beräkna $y_j = c_{ij} + y_i$ (i basträdet)
 - Beräkna reducerad kostnad för icke-basbågar
 $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$
3. Kontrollera avbrottskriterie
 - Om alla bågar uppfyller optimalitetsvillkoren är det aktuella flödet optimalt
4. Bestäm inkommande basbåge
 - Välj den icke-basbåge som inte uppfyller optvillkor, och har störst absolutbelopp av reducerad kostnad
 - Om den reducerad kostnad är negativ vill en öka flödet i den bågen, om positivt vill en minska det
5. Bestäm utgående basbåge
 - Förändra flödet maximalt, i den cykel som kommer
 - Den båge som först begränsar är utgående
6. Ersätt utgående basbåge med inkommande basbåge till nytt basträd
7. Uppdatera flödet i nätverket och gå till 2

$$x_{ij} = l_{ij} \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_{ij} \geq 0$$

$$x_{ij} = u_{ij} \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_{ij} \leq 0$$

$$l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow \bar{c}_{ij} = 0$$

Algoritm, MKF

0) Antag tillåtet flöde & basträd

- Ev. fas 1; (ingår ej i kurs)
- Identifiera basbågar
 - $l_y < x_y < u_y \Rightarrow$ båge (i,j) basbåge
 - Ev. komplettera till ett (bas)träd

1) Beräkna reducerad kostnad

- Börja med att beräkna nodpriser
 - Utnyttja att $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j = 0$ för basbågarna $y_j = c_{ij} + y_i$
 - Sätt tex $y_1 = 0$
- Beräkna $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$ för icke-basbågar

2) Kontrollera avbrottskriterie

- Om alla bågar uppfyller villkoren:
så är aktuellt flöde optimalt
- $$x_y = l_y \Rightarrow \bar{c}_y \geq 0$$
- $$x_y = u_y \Rightarrow \bar{c}_y \leq 0$$
- $$(l_y < x_y < u_y \Rightarrow \bar{c}_y = 0)$$

3) Bestäm inkommande basbåge

$$\bar{c}_{pq} = \max_{(i,j) \in I} |\bar{c}_{ij}|$$

- Där I är mängden av icke-basbågar som ej uppfyller optvillkor. Om $\bar{c}_{pq} < 0$ vill man öka flödet i den bågen, om $\bar{c}_{pq} > 0$ vill man minska flödet.

4) Bestäm utgående basbåge

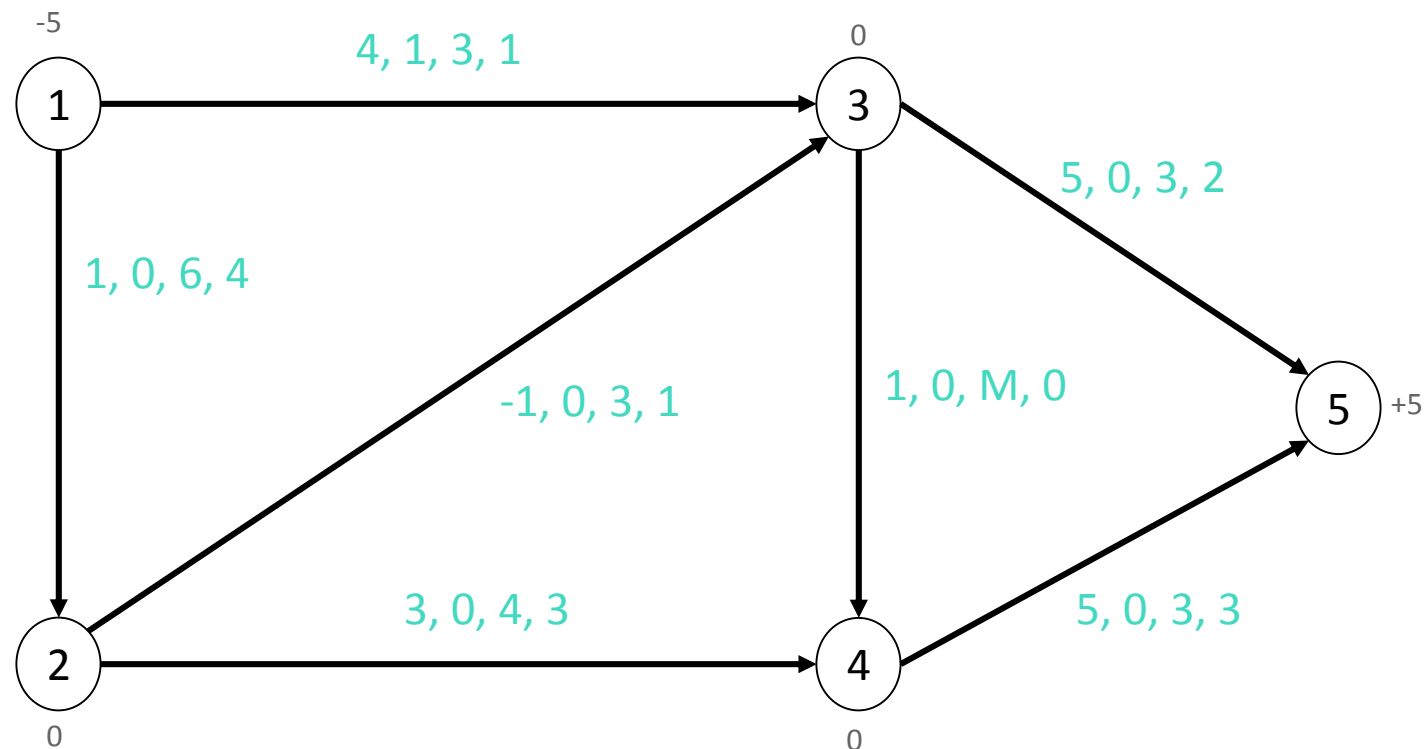
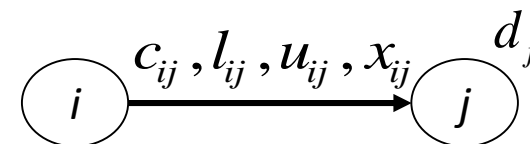
- $\theta = \min \{ \theta^+, \theta^- \}$, där
- $\theta^+ = \min \{ (u_y - x_y) | (i,j) \text{ framåtbåge i cykeln} \}$
- $\theta^- = \min \{ (x_y - l_y) | (i,j) \text{ bakåtbåge i cykeln} \}$
- Den båge som först begränsar blir utgående (r,s)

5) Ersätt basbåge (r,s) med ny basbåge (p,q)

6) Uppdatera flödet i nätverket och gå till 1

MKF

Sök minkostnadsflöde i nedanstående nätverk
 Starta med nedanstående (tillåtna) flöde

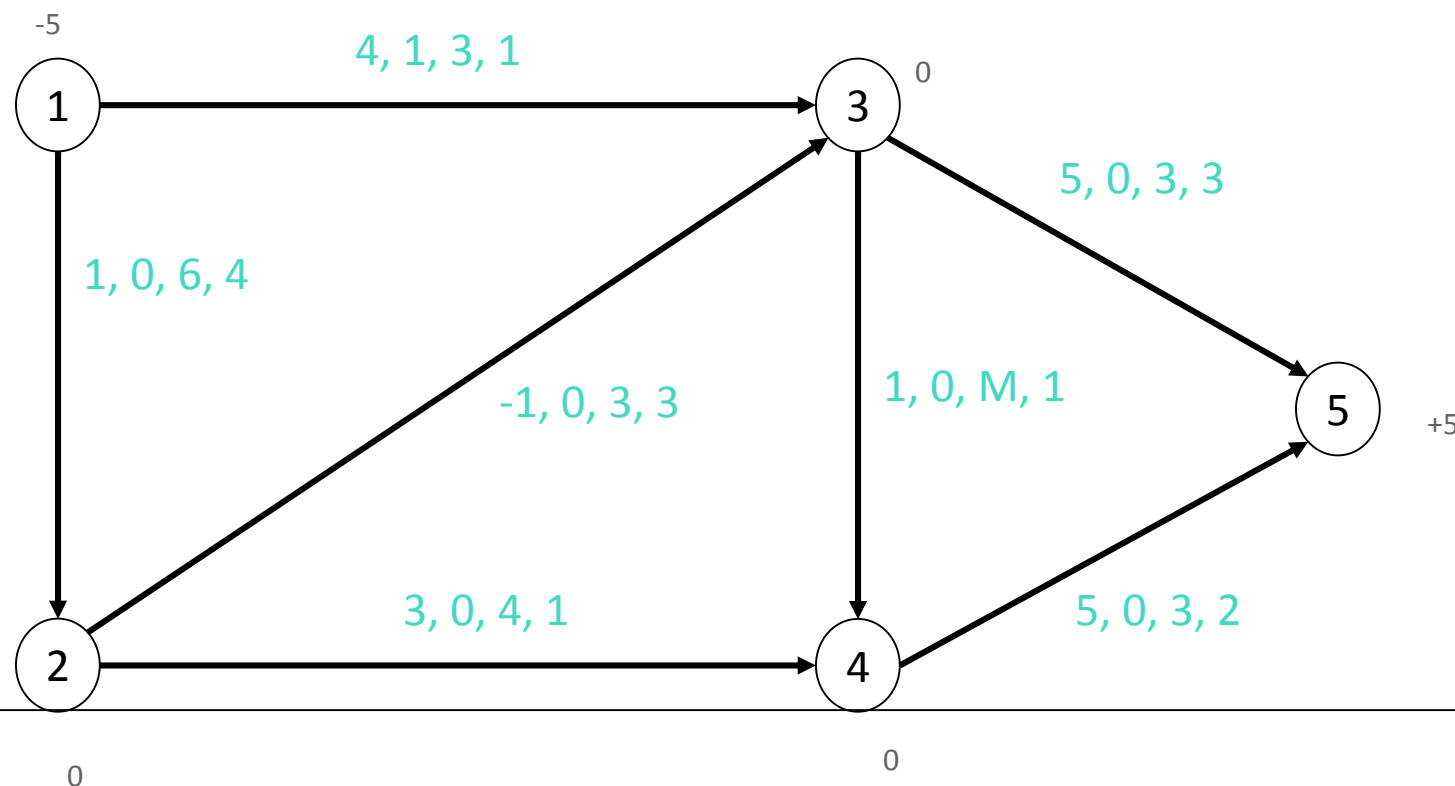
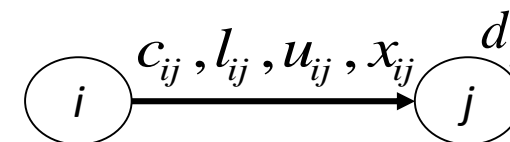


Exempel, känslighetsanalys, MKF

- Hur mycket får en ny båge kosta för att vara intressant?
 - Antag att ny båge (a, b) är (från början) icke-bas: $x_{ab} = l_{ab}$
 - Tas in i basen om $\bar{c}_{ab} = c_{ab} + y_a - y_b < 0$, dvs $c_{ab} < -y_a + y_b$
- Hur mycket tjänar vi på att kapaciteten i en båge ökas?
 - Ges av bågens reducerade kostnad
- Hur mycket kostar det om flödeskravet till en nod stiger med 1
 - Ges av nodpriset
- Hur mycket kostar det om flödeskravet på en båge stiger med 1
 - Ges av bågens reducerade kostnad
- Hur kan bågkostnad förändras, utan att uppsättningen använda (bas)bågar ändras?
 - Ges av bibehållna (optimala) reducerade kostnader

MKF, känslighetsanalys

I nedanstående optimala nätverk, besvara frågorna på nästa sida.



Frågor på det optimala flödet

- Antag att det fanns en båge mellan 1 & 4. Hur mycket skulle den få kosta, för att vara intressant att använda?
- Hur förändras kostnaden, om flödet i båge (1,3) måste öka med en enhet?
- Vad skulle det kosta att skicka 6 istället för 5 enheter genom nätverket? Vad blir marginalkostnaden?
 - För vilken flödesökning är den marginalkostnaden giltig?
- Hur mycket kan kostnaden i båge (2,4) öka, utan att baslösningen ändras
- Vilken blir lösningen om vi lägger till båge (1,5), med en kostnad på 6, undre gräns 0 och övre gräns 2?

Minkostnadsflöde

- Olika specialfall av minkostnadsflöde
 - Transportproblemet (Sid 55)
 - Genomskeppningsproblemet (Sid 59)
 - Billigastevägproblemet (Kap 8.4)
- Specialfallen har specialalgoritmer
 - Försök att utnyttja strukturen i varje problemtyp
- Utvidgning minkostnadsflöde
 - Flera varutyper (Multi-commodity) (Sid 219)
 - Vinster/Förluster (Sid 220)

www.liu.se