**Svar till kontrollskrivning i Analys III, TNA006**

1. (a) Låt $f(x,y) = \frac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}$ T.ex. så blir då:
   **längs $x$-axeln**
   $$f(x,0) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$
   Om vi närmar oss origo längs $x$-axeln får vi 1/2. Om gränsvärdet i uppgiften existerar måste det vara 1/2.
   **längs $y$-axeln**
   $$f(0,y) = \frac{-2y^2}{y^2} = -2$$
   Alltså får vi värdet $-2$ då vi närmar oss origo längs $y$-axeln. Således existerar gränsvärdet i uppgiften inte.
   **Svar:** Gränsvärdet existerar ej.

   (b) En normalvektor till tangentplanet är $\nabla f(4,2,-1)$ då $f(x,y,z) = z^4+xz+y^3$. Vi får $\nabla f(4,2,-1) = (-1,12,0)$. Eftersom en punkt i tangentplanet skall vara $(4,2,-1)$ så blir planet:
   **Svar:** Tangentplanet är
   $$-(x-4)+12(y-2) = 0$$

2. Med kedjeregeln får vi
   $$z'_x = 2z'_u, \quad z'_y = z'_u + z'_v$$
   $$z''_{xx} = 4z''_{uu}, \quad z''_{xy} = 2z''_{uu} + 2z''_{uv}, \quad z''_{yy} = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$$
   Med detta i PDEn:
   $$z''_{xx} - 4z''_{xy} + 4z''_{yy} = \cdots = 4z''_{vv} = 0$$
   Lösningar blir $z = vg(u) + h(u)$ där $g$ och $h$ är godtyckliga funktioner. Åter till $x, y$

   **Svar:** Lösningar är $z(x,y) = yg(2x+y) + h(2x+y)$, där $g$ och $h$ är godtyckliga funktioner.

3. Först behöver vi stationära punkter, sätt $\nabla f = \mathbf{0}$:
   $$\begin{cases} (2x - (x^2+y^2-12)e^{-x-y} & = & 0 \\ (2y - (x^2+y^2-12)e^{-x-y} & = & 0 \end{cases}$$
   Vilket har lösningar $(3,3)$ och $(-2,-2)$.

   Nu till att avgöra om det rör sig om sadelpunkter eller lok max/min punkter. Den kvadratiska formen blir:

(3,3)

$$Q(h,k) = -4h^2 - 12hk - 4k^2 = -4(h^2 + 3hk + k^2) = -4((h + \frac{3k}{2})^2 - \frac{5}{4}k^2)$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form. $(3,3)$ en sadelpunkt.

(-2,-2)

$$Q(h,k) = 6h^2 + 8hk + 6k^2 = 6(h^2 + \frac{4}{3}hk + k^2) = 6((h + \frac{2k}{3})^2 + \frac{5}{9}k^2)$$

Vilket är en positivt definit kvadratisk form, $(-2,-2)$ är då ett lokalt minimum.

**Svar:** Punkten $(-2,-2)$ är då ett lokalt minimum och $(3,3)$ är en sadelpunkt.

4. Med $F(x,y) = y^5 + xy + 1$ har vi att $F(0,-1) = 0$ och $F'y(0,-1) = 5 \neq 0$. Vi får då att det är möjligt att lösa ut $y$ som en funktion av $x$ i en omgivning av $(0,-1)$. Vi har också att $y(0) = -1$. För övriga värden, derivera implicit.

   Vi får $5y^4y' + y + xy' = 0$ vilket ger att $y'(0) = \frac{1}{5}$.

   Derivera igen: $20y^3(y')^2 + 5y^4y'' + 2y' + xy'' = 0$, vilket ger att $y''(0) = \frac{2}{25}$

   **Svar:** Det är möjligt att lösa ut $y$ som en funktion av $x$ och $y(0) = -1$, $y'(0) = \frac{1}{5}$ och $y''(0) = \frac{2}{25}$