Svar till TNA006, 141027

1. Stationära punkter: $\nabla f = 0$ ger att

$$\begin{cases} f'_x &= 1 - \frac{3y}{2+xy} = 0 \\ f'_y &= 1 - \frac{3x}{2+xy} = 0 \end{cases}$$

Om vi tar differensen mellan ekvationerna får vi

$$-\frac{3x - 3y}{2 + xy}$$

Vilket ger att $x = y$ som i sin tur ger att

$$1 - \frac{3x}{2 + x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

Som har lösningar $x = 1$ och $x = 2$. Vi har två stationära punkter $(1, 1)$ och $(2, 2)$.

Andraderivator

$$\begin{cases} f''_{xx} &= \frac{3y^2}{(2+xy)^2} \\ f''_{xy} &= -\frac{3(2+xy)-3xy}{(2+xy)^2} = -\frac{6}{(2+xy)^2} \\ f''_{yy} &= \frac{3x^2}{(2+xy)^2} \end{cases}$$

Punkten $(1, 1)$: Den kvadratiska formen är

$$Q(h,k) = \frac{1}{3}(h^2 - 4hk + k^2) = \frac{1}{3}\Big((h-2k)^2 - 4k^2 + k^2\Big) = \frac{1}{3}\Big((h-2k)^2 - 3k^2\Big)$$

Q är alltså indefinit och därmed är punkten $(1, 1)$ en sadelpunkt.

Punkten $(2, 2)$: Den kvadratiska formen är

$$Q(h,k) = \frac{1}{3}(h^2 - hk + k^2) = \frac{1}{3}\Big((h - \frac{k}{2})^2 - \frac{1}{4}k^2 + k^2\Big) = \frac{1}{3}\Big((h - \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2\Big)$$

Q är alltså positivt definit och därmed är punkten $(2, 2)$ en minimipunkt.

Svar: Punkten $(2, 2)$ en minimipunkt, och punkten $(1, 1)$ en sadelpunkt.

2. (a) f växer snabbast i gradientens riktning:

$$\nabla f = \left(yz - \frac{1}{1 + (x + y + z)^2},\ xz - \frac{1}{1 + (x + y + z)^2},\ xy - \frac{1}{1 + (x + y + z)^2}\right)$$

Svar: f växer snabbast i riktningen $\nabla f(1, -1, 0) = (-1, -1, -2)$.

(b) Vi har att $\nabla f(1,-1,0) = (-1,-1,-2)$ är en normalvektor till tangentplanet, och en punkt i planet är $(1,-1,0)$.

Svar: Tangentplanet är $-(x-1)-(y+1)-2z=0$.

3. Vi kan beräkna integralen som:

$$\iiint_D e^z dxdydz = \iint_{D_{xy}} (\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^4 e^z dz)dxdy$$

där D_{xy} fås genom att se på skärningen mellan ytorna, som är cylindern $x^2+y^2=4$. Alltså är D_{xy} projektionen av cylindern på xy-planet, alltså cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 4$.

$$\iint_{D_{xy}} (\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^4 e^z dz)dxdy = \iint_{D_{xy}} \left[e^z\right]_{2\sqrt{x^2+y^2}}^4 dxdy = \iint_{D_{xy}} e^4 - e^{2\sqrt{x^2+y^2}} dxdy =$$

Byte till PK ger..

$$2\pi \int_0^2 \left(e^4 - e^{2r}\right) r dr = .. = \frac{\pi}{2}\left(5e^4 - 1\right).$$

Svar: $\iiint_D e^z dxdydz = \frac{\pi}{2}\left(5e^4-1\right)$

4. Det området vi söker största och minsta värdet över är kompakt (en ellipsoid) och funktionen är kontinuerlig, alltså antas största och minsta värde.

Med Lagrange multiplikatorsmetod: $\nabla f = \lambda g$, med $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

$$\begin{cases} 1 &= 2\lambda x \\ 2 &= 8\lambda y \\ 0 &= 18\lambda z \end{cases}$$

Sista ekvationen ger att $\lambda = 0$ eller $z = 0$.

Då $\lambda = 0$ ger i de andra ekvationerna motsägelser, alltså ingen lösning då $\lambda = 0$.

Då $z = 0$ har vi att $x^2 + 4y^2 = 32$ och

$$\begin{cases} 1 &= 2\lambda x \\ 2 &= 8\lambda y \end{cases}$$

Om vi tar 2(1)-(2) får vi $4\lambda(x-2y)$ och eftersom vi redan vet att $\lambda = 0$ inte ger några lösningar får vi att $x = 2y$. Detta ger då att $4y^2 + 4y^2 = 32$ som ger oss $8y^2 = 32$ eller $y^2 = 4$.

Intressanta punkter är då $(4, 2, 0)$ och $(-4, -2, 0)$.

Resterande punkter att kontrollera:

$\nabla g = 0$ ger ingen punkt på ytan, endast $(0, 0, 0)$.

Båda gradienterna existerar i alla punkter.

Ändpunkter saknas till en sfär.

Således finns största och minsta värdet bland:

$$f(4, 2, 0) = 8, \quad f(-4, -2, 0) = -8$$

Svar: Största värdet är 8, minsta värdet är -8.

5. Kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = yz'_u$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} z'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(yz'_u\right) = y\frac{\partial z'_u}{\partial x} = y\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = y^2 z''_{uu}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} z'_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(yz'_u\right) = z'_u + y\frac{\partial z'_u}{\partial y} = z'_u + y\left(\frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= z'_u + xyz''_{uu} - \frac{1}{y} z''_{uv}.$$

Med detta i PDEn får vi

$$y = xz''_{xx} - yz''_{xy} + z'_x = xy^2 z''_{uu} - y\left(z'_u + xyz''_{uu} - \frac{1}{y} z''_{uv}\right) + yz'_u = z''_{uv}$$

Vilket ger att

$$z''_{uv} = \frac{1}{v}.$$

Vilket ger att $z'_u = \ln v + g(u)$ och $z = u \ln v + G(u) + h(v)$.

Svar: Lösningar är $z(x, y) = xy \ln \frac{1}{y} + G(xy) + h(\frac{1}{y})$, där G och h är godtyckliga deriverbara funktioner.

6. Vi byter variabler till $u = x + y$, $v = x - y$ integrationsområdet E i uv kommer då att begränsas av linjerna $u = 2$, $v = 0$ och $u + v = 0$. Vi får att

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\iint_D e^{(y-x)/(x+y)} dxdy = \iint_E e^{-v/u} \left| -\frac{1}{2} \right| dudv = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_{-u}^0 e^{-v/u} dv \right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \Big[-ue^{-v/u} \Big]_{-u}^{0} du = \frac{1}{2}\int_0^2 -u + ue^1 du = \frac{e-1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = e-1.$$

Svar: $\iint_D e^{(y-x)/(x+y)}dxdy = e-1.$

7. Vi bestämmer ekvationen för normalen i en punkt på ytan $(x, y, z(x, y))$, normalvektorn är då $(z'_x, z'_y, -1)$. Normallinjen är då

$$\mathbf{r}(t) = (x + tz'_x,\ y + tz'_y,\ z - t)$$

Om linjen skall gå genom origo så ser vi att $t = z$ och får då två ekvationer

$$x + zz'_x = 0, \quad y + zz'_y = 0.$$

Den första ekvationen kan vi skriva om till

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + z^2\right) = 0$$

Vilket ger att $z^2 + x^2 = g(y)$ detta i den andra ekvationen ger att $g(y) = -y^2 + C$. Alltså är $z^2 + x^2 + y^2 = C$

Svar: Ytorna är delar av sfärer med centrum i origo.