TSKS21 Signaler, information & bilder

Föreläsning 7

Signaler och system – frekvensdomänen, tidsdiskreta fourierserier och fouriertransformer samt fönstring och DFT

Mikael Olofsson
Institutionen för Systemteknik (ISY)
Ämnesområdet Kommunikationssystem

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Tidskontinuerlig fouriertransform

Krav på signalen $x(t)$:

- Absolutintegrerbar: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$
- Ändligt antal diskontinuiteter.
- Begränsad variation: $\int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|\, dt < \infty$

Transform:

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Inverse transform:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

- Spektrum av $x(t)$: $X(\omega)$
- Amplitudspektrum: $|X(\omega)|$
- Fasspektrum: $\arg\{X(\omega)\}$

Utsignal från ett LTI-system

Notation: $A(\omega) = \mathscr{F}\{a(t)\}$ $\quad B(\omega) = \mathscr{F}\{b(t)\}$

Egenskap: $\mathscr{F}\{(a*b)(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (a*b)(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau)\, d\tau\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau) e^{-j\omega t}\, d\tau\, dt = \Big/ \begin{matrix}\lambda = t-\tau \\ d\lambda = dt\end{matrix} \Big/ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(\lambda) e^{-j\omega(\tau+\lambda)}\, d\tau\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) e^{-j\omega\lambda}\, d\lambda = A(\omega) B(\omega)$$

LTI-system:

$$\begin{matrix} x(t) \\ X(\omega) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(\omega) \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) = (x*h)(t) \\ Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \end{matrix}$$

Periodiska signaler igen

Observation: $\mathscr{F}^{-1}\{\delta(\omega-\omega_1)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_1)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_1 t}$

Alltså: $\mathscr{F}\{e^{j\omega_1 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_1)$

Euler: $\mathscr{F}\{\cos(\omega_1 t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2}\right\} = \pi\big(\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1)\big)$

$$\mathscr{F}\{\sin(\omega_1 t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{j2}\right\} = \frac{\pi}{j}\big(\delta(\omega-\omega_1) - \delta(\omega+\omega_1)\big)$$

$x(t)$ periodisk med period T: $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Sinus in – sinus ut - principen – IGEN!

För LTI-system har vi:

Sinus in – Sinus ut (samma frekvens)

Närmare bestämt:

Insignal: $x(t) = \hat{X}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Utsignal: $y(t) = \hat{X}|H(\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \varphi + \arg\{H(\omega_0)\})$

Amplitudkarakteristik: $|H(\omega)|$

Faskarakteristik: $\arg\{H(\omega)\}$

Detta är $j\omega$-metoden i kondenserad form.

Viktig egenskap: Derivator

Notation: $(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$

Vi har:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(\omega)\, j\omega e^{j\omega t}}_{\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}}\, d\omega$$

Resultat:

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega X(\omega)$$

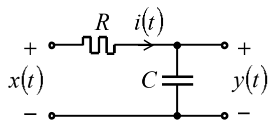
$$\mathscr{F}\left\{\frac{d^k}{dt^k}x(t)\right\} = (j\omega)^k X(\omega)$$

Jämför med impedanser i $j\omega$-metoden.

Viktig egenskap: Derivator – exempel

Notation: $X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$ Vi har: $\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega\, X(\omega)$

Exempel:



Energifritt: $y(t)$ initialt 0.

Kapacitans: $i(t) = C\frac{d}{dt}y(t)$ (1)

Resistans: $x(t) - y(t) = Ri(t)$ (2)

(1) i (2) $\Rightarrow x(t) - y(t) = RC\frac{d}{dt}y(t)$

$\Rightarrow RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$

Transform $\Rightarrow$

$j\omega RCY(\omega) + Y(\omega) = X(\omega)$

$\Rightarrow (j\omega RC + 1)Y(\omega) = X(\omega)$

$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}X(\omega)$

Transform och inverstransform görs vanligen med en tabell.

Signaleffekt och signalenergi – Parseval

Signaleffekt: $|x(t)|^2$ Signalenergi: $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\, dt$

Parsevals relation, TK fouriertransform (specialfall):

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega\, x^*(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)e^{j\omega t}\, dt\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)X^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\, d\omega$$

Energispektrum: $|X(\omega)|^2$

Parsevals relation (generellt): $\int_{-\infty}^{\infty}a(t)b^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)B^*(\omega)\, d\omega$

Tidsdiskreta fourierserier och -transformer

TD fourierserier

Krav på signalen $x[k]$: Periodisk, period K_0.

$$x[k]=\sum_{n=0}^{K_0-1} D_n e^{jkn\Omega_0} \qquad D_n=\frac{1}{K_0}\sum_{k=0}^{K_0-1} x[k]e^{-jkn\Omega_0} \qquad \Omega_0=2\pi/K_0$$

TD fouriertransform

Krav på signalen $x[k]$: Icke-periodisk. Absolutsummerbar.

$$x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{-jk\Omega}d\Omega \qquad X(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\Omega}$$

Periodisk med period 2π.

Egenskaper hos fourierserieutveckling

Låt $x[k]$ och $y[k]$ vara periodiska signaler med period K, normerad vinkelfrekvens Ω_0 och fourierseriekoefficienter C_n respektive D_n.

Signal	Fourierseriekoefficient # n
$ax[k]+by[k]$	aC_n+bD_n
$x[k-k_0]$	$C_n e^{-jn\Omega_0 k_0}$
$x[-k]$	C_{-n}

Utsignal från ett tidsdiskret LTI-system

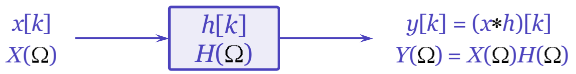
Notation: $A(\Omega)=\mathscr{F}\{a[k]\}$ $\qquad B(\Omega)=\mathscr{F}\{b[k]\}$

Egenskap: $$\mathscr{F}\{(a*b)[k]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a*b)[k]\,e^{-j\Omega k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]b[k-n]e^{-j\Omega k}$$

$$=\Big/\, m=k-n \,\Big/ = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]b[m]e^{-j\Omega(n+m)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a[n]e^{-j\Omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}b[m]e^{-j\Omega m}=A(\Omega)B(\Omega)$$

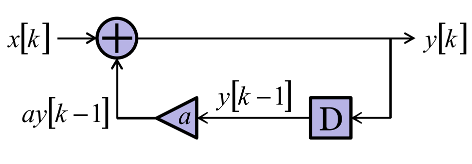
LTI-system:



Viktig egenskap: Fördröjning – exempel

Notation: $X(\Omega)=\mathscr{F}\{x[k]\}$ $\qquad$ Vi har: $\mathscr{F}\{x[k-k_0]\}=e^{-jk_0\Omega}X(\Omega)$

Exempel:



Energifritt:
$y[k]$ initialt 0.

Ur figur: $y[k]=x[k]+ay[k-1]$

$\Rightarrow \quad y[k]-ay[k-1]=x[k]$

Transformera $\Rightarrow$

$$Y(\Omega)-ae^{-j\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad \left(1-ae^{-j\Omega}\right)Y(\Omega)=X(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad Y(\Omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}X(\Omega)$$

Mera Parseval

För TK fouriertransform: $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

För TK fourierserie: $$\frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

För TD fouriertransform: $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega$$

För TD fourierserie: $$\frac{1}{K_0} \sum_{k=0}^{K_0-1} |x[k]|^2 = \sum_{n=0}^{K_0-1} |D_n|^2$$

Mikael Olofsson
ISY/KS