Svar till TNA006 151026

1. Först söks stationära punkter, $\nabla f = 0$:

$$\begin{cases} f'_x &= (1+y(1+x))e^{xy} = 0 \\ f'_y &= x(1+x)e^{xy} = 0. \end{cases}$$

Vi ser i andra ekvationen att $x = 0$ eller $x = -1$. Då $x = 0$ måste $y = -1$, fallet $x = -1$ saknar lösningar. En stationär punkt $(0, -1)$.

För att avgöra om det är en lokal extrempunkt studerar vi den kvadratiska formen Q:

$$f''_{xx} = (y{+}y(1{+}y(1{+}x)))e^{xy}, \quad f''_{xy} = (1{+}x{+}x(1{+}y(1{+}x)))e^{xy}, \quad f''_{yy} = x^2(1{+}x)e^{xy}$$

I punkten $(0, -1)$:

$$f''_{xx}(0,-1) = -1, \quad f''_{xy}(0,-1) = 1, \quad f''_{yy}(0,-1) = 0.$$

Vi har

$$Q(h,k) = -h^2 + 2hk = -\big((h-k)^2 - k^2\big)$$

Vilket ger att den kvadratiska formen är indefinit, och det ger att f har en sadelpunkt i $(0, -1)$.

Svar: f har inga lokala extrempunkter.

2. (a) Gradienten $\nabla f = (e^y, 1 + xe^y)$ den normaliserade riktningen är $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(3,4)$. Riktningsderivatan blir

$$f'_{\mathbf{v}}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{5}(1,2) \cdot (3,4) = \frac{11}{5}.$$

Svar: $f'_{\mathbf{v}}(1,0) = \frac{11}{5}$.

(b) Tangentplanet i punkten $(x, y, f(x,y))$ har normalvektor

$$(f'_x, f'_y, -1) = (e^y, 1 + xe^y, -1)$$

Tangentplanet skall vara parallellt med planet $x - z = 0$, ett plan som har normalvektor $(1, 0, -1)$. För att vektorerna skall vara parallella så skall att λ finnas så:

$$(e^y, 1 + xe^y, -1) = \lambda(1, 0, -1).$$

Vilket ger att $\lambda = 1$. Vilket sedan ger att $y = 0$, och $x = -1$.

Tangentplanet i punkten där $y = 0$ och $x = -1$ har normalvektor $(1, 0, -1)$ och innehåller punkten $(-1, 0, 1)$. Tangentplanet är $(x + 1) - (z - 1) = 0$.

Svar: Tangentplanet är parallellt med planet $x - z = 0$ i punkten $(-1, 0, 1)$. Tangentplanet är $x - z = -2$

3. Vi byter variabler till $u = x + 2y$ och $v = x - y$, området E ges då av $-2 \leq u \leq 2$, $-1 \leq v \leq 1$, Jacobianen är $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = -\frac{1}{3}$.

$$\iint_D (x-y)^2(x+2y)^2 dxdy = \iint_E v^2u^2\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-2}^{2} u^2v^2du\Big)dv =$$

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}u^3v^2\right]_{-2}^{2} dv = \frac{16}{9}\int_{-1}^{1} v^2dv = \frac{16}{9}\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{27}.$$

Svar: $\iint_D (x-y)^2(x+2y)^2dxdy = \frac{32}{27}$

4. Mängden vi söker största och minsta värde över är kompakt, och f är kontinuerlig, största och minsta värde antas säkert i området.

   Vi har en halv sfär, vi börjar med att söka intressanta punkter där $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ med Lagranges multiplikatormetod. Vi söker punkter där vi har parallella gradienter, $\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$\begin{cases} 1 &= 2\lambda x \\ 2 &= 2\lambda y \\ 2z &= 2\lambda z \end{cases}$$

   Sista ekvationen ger att $2z(1-\lambda) = 0$, alltså $z = 0$ eller $\lambda = 1$.

$\lambda = 1$ Då får vi att

$$\begin{cases} 1 &= 2x \\ 2 &= 2y \end{cases}$$

Vi har att $x = \frac{1}{2}$ och $y = 1$, och eftersom $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ får vi att $z = \pm\frac{\sqrt{31}}{2}$. Två intressanta punkter $(\frac{1}{2}, 1, \pm\frac{\sqrt{31}}{2})$.

$z = 0$ Vi har fortfarande att

$$\begin{cases} 1 &= 2\lambda x \\ 2 &= 2\lambda y \end{cases}$$

Detta ger att $y = 2x$ eller att $\lambda = 0$ (som ger orimliga $1 = 0$). Med $y = 2x$ och $z = 0$ får vi att $x^2 + 4x^2 = 9$, vilket ger $x = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$. En intressant punkt $(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}, 0)$.

$\nabla g = 0$ ger oss endast punkten $(0, 0, 0)$ som ej är i området.

Singulära Gradienterna finns i alla punkter. Inget här alltså.

Ändpunkter Här får vi cirkeln $y^2 + z^2 = 9$ med $x = 0$. Vi får då bestämma största och minsta värdet av $f_1(y, z) = f(0, y, z) = 2y + z$ då $g_1(y, z) = y^2 + z^2 - 9 = 0$. Detta kan vi bestämma med Lagranges multiplikatormetod, så $\nabla f_1 = \lambda \nabla g_1$:

$$\begin{cases} 2 &= 2\lambda y \\ 2z &= 2\lambda z \end{cases}$$

Andra ekvationen ger att $2z(1-\lambda)=0$ så alltså $z=0$ eller $\lambda=1$. Då $z=0$ ger bivillkoret att $y=\pm 3$. Då $\lambda=1$ får vi att $y=1$ och bivillkoret ger då att $z=\pm\sqrt{8}$. Vi har då nya punkter $\pm(0,3,0)$ och $(0,1,\pm\sqrt{8})$.

Vi ser också att $\nabla g_1 = 0$ inte ger några intressanta punkter, och att gradienterna existerar överallt. Likaså har vi nu en cirkel, som inte har ändpunkter.

Vi kan nu veta att största och minsta värdet finns bland:

$$f(\frac{1}{2},1,\pm\frac{\sqrt{31}}{2})=\frac{41}{4},\quad f(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{6}{\sqrt{5}},0)=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5},$$

$$f(0,3,0)=6,\quad f(0,-3,0)=-6,\quad f(0,1,\pm\sqrt{8})=10.$$

Svar: Största värdet är $\frac{41}{4}$ och minsta värdet är -6.

5. Låt $F(x,y,z)=e^z-y\ln|xy+z|$- Då är $F'_z=e^z-\frac{y}{xy+z}$ och $F'_z(e,1,0)=1-\frac{1}{e}\neq 0$, vilket ger att det finns lokalt en funktion $z(x,y)$.

   Vi vet att $z(e,1)=0$.

   Derivera implicit för att bestämma derivatorna:

   M.a.p. x

$$\frac{\partial}{\partial x}e^z=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\ln|xy+z|\right),\ \Rightarrow\ e^z z'_x=\frac{y}{yx+z}(y+z'_x)$$

   I punkten $(e,1,0)$: $z'_x(e,1)=\frac{1}{e}(1+z'_x(e,1))$, vilket ger att $z'_x(e,1)=\frac{1}{e-1}$.

   M.a.p. y

$$\frac{\partial}{\partial y}e^z=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\ln|xy+z|\right),\ \Rightarrow\ e^z z'_y=\ln|xy+z|+\frac{y}{yx+z}(x+z'_y)$$

   I punkten $(e,1,0)$: $z'_y(e,1)=1+\frac{1}{e}(e+z'_y(e,1))$, vilket ger att $z'_e(e,1)=\frac{2e}{e-1}$

   Taylorpolynomet av grad 1 är då:

   Svar: Vi har visat att ekvationen i en omgivning av $(e,1,0)$ definierar $z(x,y)$. Taylorpolynomet är $p(x,y)=\frac{1}{e-1}(x-e)+\frac{2e}{e-1}(y-1)$.

6. Rita figur!

$$\iiint_D y^2dxdydz=\iint_{D_1}(\int_{1-2x-2y}^{3-x^2-y^2}y^2dz)dxdy=\iint_{D_1}\left[y^2z\right]_{1-2x-2y}^{3-x^2-y^2}dxdy=$$

$$\iint_{D_1}y^2\big(3-x^2-y^2-(1-2x-2y)\big)dxdy=\iint_{D_1}y^2\big(4-(x-1)^2-(y-1)^2\big)dxdy=$$

Där D_1 är projektionen av D på xy-planet. Skärningen mellan ytorna ges av

$$3 - x^2 - y^2 = 1 - 2x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

D_1 är området $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$. Vi byter nu till polära koordinater:

$$\begin{cases} x &= 1 + r\cos\theta \\ y &= 1 + r\sin\theta \end{cases}, \quad 0 < r < 2,\ 0 < \theta < 2\pi, \quad \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r.$$

Integralen blir efter variabelbytet

$$\int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} (1+r\sin\theta)^2 \big(4-r^2\big) r d\theta \Big) dr = \int_0^2 r\big(4-r^2\big) \int_0^{2\pi} (1+2r\sin\theta + r^2\sin^2\theta) d\theta \Big) dr =$$

(Utnyttjar att $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$)

$$\int_0^2 r\big(4-r^2\big) \Big[(\theta - 2r\cos\theta + r^2 (\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}) \Big]_0^{2\pi} dr =$$

$$\int_0^2 r\big(4-r^2\big)\big(2\pi + \pi r^2\big) dr = \pi \int_0^2 \big(8r + 2r^3 - r^5\big) dr = \pi \left[4r^2 + \frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{6} \right]_0^2 = \frac{40\pi}{3}.$$

Svar: $\iiint_D y^2 dx dy dz = \frac{40\pi}{3}$.

7. Kedjeregeln ger

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u + y z'_v$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x z'_v$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z'_u + y z'_v \right) = z'_v + \frac{\partial z'_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + y\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \right) = z'_v + x z''_{uv} + xy z''_{vv}.$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x z'_v \right) = +x\left(\frac{\partial z'_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \right) = x^2 z''_{vv}.$$

I ekvationen

$$x z''_{xy} - y z''_{yy} - z'_y = x z'_v + x^2 z''_{uv} + x^2 y z''_{vv} - x^2 y z''_{vv} - x z'_v = x^2 z''_{uv} = x^3 y$$

Ekvationen blir alltså

$$z''_{uv} = v, \quad \Rightarrow \quad z'_u = \frac{v^2}{2} + g(u), \quad \Rightarrow \quad z = \frac{uv^2}{2} + G(u) + h(v).$$

Åter till x, y:

Svar: Lösningar är $z(x,y) = \frac{x^3y^2}{2} + G(x) + h(xy)$