TENTAMEN

Datum:	6 april 2018
Tid:	14-18
Provkod:	TEN1
Kursnamn:	TNSL05 – Optimering, modellering och planering
Institution:	ITN
Antal uppgifter:	5
Betygskrav:	För godkänt krävs normalt 12 p, betyg 4 kräver 16p och betyg 5, 21p.
Examinator:	Joakim Ekström
Jourhavande lärare:	Marcus Posada, 011-363564
Kursadministratör:	Marie-Louise Gustafsson, 011-363121
Tillåtna hjälpmedel:	Miniräknare, ett A4-blad med valfri text/bilder/anteckningar på båda sidor, ordlista för översättning till svenska efter behov

Utlämning av skrivningar sker tidigast efter att resultat har meddelats med e-post. Kortfattat lösningsförslag publiceras på kursens hemsida vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

<u>När Du löser uppgifterna</u>
Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som behandlats på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

<u>Vid skrivningens slut</u>
Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Om du bifogar sidor från tentamen måste dessa sidor rivas ut och lämnas in som numrerade lösblad

(5p) Uppgift 1

Östgötaskog AB är ett träföretag med 6 avverkningsplatser och 3 sågverk. De vill frakta timmer från avverkningsplatserna till sågverken. Väl vid sågverken sågas timret till brädor, med flis som restprodukt. Brädorna och fliset ska transporteras vidare till 4 kunder. Kunderna, k, efterfrågar D_k^b stycken brädor och D_k^f kubikmeter flis var. Företagets sågverk, i, har en kapacitet på K_i timmerstockar. Företaget har lagt upp en avverkningsplan som innebär att tillgången på timmer från avverkningsplatserna, j, är T_j timmerstockar under planeringshorisonten. Från varje timmerstock kan sågverken producera upp till 8 brädor eller 1 kubikmeter flis. Att transportera en timmerstock från avverkningsplats i till sågverk j kostar c_{ij}^t kr. Att transportera en bräda från sågverk j till kund k kostar lika mycket som att transportera en kubikmeter flis, c_{jk}^b. Träföretaget vill tillgodose all efterfrågan, men minimera sina transportkostnader. De har valt att modellera sitt vinstminimeringsproblem som ett linjärt optimeringsproblem och har ställt upp följande variabeldefinitioner,

$x_{ij} =$ antal timmerstockar som avverkas vid i och fraktas till sågverk j,

$y_{jk} =$ antal brädor som fraktas från sågverk j till kund k,

$z_{jk} =$ antal kubikmeter flis som fraktas från sågverk j till kund k.

a) Formulera företagets målfunktion utifrån variablerna och parametrarna ovan. (2p)

$$\min z = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^t x_{ij} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} c_{jk}^b (y_{jk} + z_{jk})$$

b) Använd de definierade variablerna och parametrarna ovan och skapa bivillkor som säkerställer att följande uppfylls (2p)

i) ingen av avverkningsplatserna överskrider mängden tillgängligt timmer,

$$\sum_j x_{ij} \le T_i, \qquad i = 1, \dots, 6$$

ii) inget av sågverken överskrider sin kapacitet,

$$\sum_i x_{ij} \le K_j, \qquad j = 1,2,3$$

iii) varje kunds efterfrågan på brädor uppfylls,

$$\sum_j y_{jk} \ge D_k^b, \qquad k = 1, \dots, 4$$

iv) varje kunds efterfrågan på träflis uppfylls.

$$\sum_j z_{jk} \ge D_k^f, \qquad k = 1, \dots, 4$$

c) Förklara med egna ord följande bivillkor utifrån problembeskrivningen ovan (1p),

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1/8 \sum_{k=1}^{4} y_{jk} + \sum_{k=1}^{4} \mathrm{z}_{\mathrm{jk}}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

En timmerstock ger 8 brädor eller 1 m^3 träflis. Sifferexempel: om 10 timmerstockar fraktas från avverkningsplatserna till ett av sågverken kan antingen 80 brädor sågas, 10 m^3 träflis flisas, eller någon kombination däremellan. Observeras kan att det här är en LP-modell, inte en heltalsmodell, så andelar av brädor/stockar/flismängder är tillåtna lösningar.

(5p) Uppgift 2

Ett företag tillverkar fyra olika produkter. De har tillgång till två olika maskiner och vill planera sin produktion för den närmaste månaden. Båda maskinerna kan tillverka varje produkt, dock med olika stor tidsåtgång. Tiden som behövs för att producera en produkt, i timmar, samt den maximala tillgängliga tiden i maskinerna, ges av tabellen nedan.

		Produkt				
		1	2	3	4	Tillgänglig tid
Maskin	A	0,5	0,3	2	10	120
	B	1,5	0,7	0,2	1	80

Produktionen kräver fyra olika råvaror. Utöver den tillgängliga maskintiden begränsas produktionen också av råvarutillgången. Åtgången av råvaror för vardera produkt, samt den maximala råvarutillgången, ges nedan.

		Produkt				
		1	2	3	4	Tillgång
Råvara	R_1	1	5	1	1	300
	R_2	2	4	2	1,5	500
	R_3	0,5	2	5	10	600
	R_4	5	0,4	0,5	12	1000

Vinsten för vardera producerad enhet av de fyra produkterna är 80, 150, 70 och 260 kr. Företagets problem att maximera vinsten för den kommande månaden har formulerats som ett linjärt optimeringsproblem och sedan lösts med AMPL/CPLEX.

Variabeldefinitioner:

x_{ij} = antal enheter av i som tillverkas i maskin j, där $i = 1, 2, 3, 4$ och $j = A, B$

Parametrar:

t_{ij} = antal timmar produktionstid som behövs för produkt i i maskin j
M_j = maximalt antal tillgängliga timmar i maskin j
N_k = antal tillgängliga enheter av råvara k
r_{ik} = antal enheter av råvara k som går åt för produktion av en enhet av produkt i
c_i = vinsten per producerad enhet av produkt i

$\max z = \sum_{\mathrm{i}} \sum_j c_i x_{ij}$
då
$\sum_{\mathrm{i}} t_{ij} x_{ij} \leq M_j,$ $\quad j = \mathrm{A, B} \quad (Produktionstid)$
$\sum_{\mathrm{i}} \sum_j r_{ik} x_{ij} \leq \mathrm{N_k},$ $\quad k = \mathrm{R_1, R_2, R_3, R_4} \quad (Råvaror)$
$x_{ij} \geq 0,$ $\quad \mathrm{i} = 1, 2, 3, 4,\ \mathrm{j} = \mathrm{A, B}\ (Icke - negativitet)$

```
CPLEX 12.6.3.0: sensitivity
CPLEX 12.6.3.0: optimal solution; objective 24271.93745
5 dual simplex iterations (1 in phase I)
: _objname    _obj      :=
1   z         24271.9
;

:    _varname      _var        _var.rc       :=
1   x[1,'A']   79.2354      7.10543e-15
2   x[1,'B']    0           7.10543e-15
3   x[2,'A']   34.318      -8.88178e-15
4   x[2,'B']    0          -8.88178e-15
5   x[3,'A']    0         -17.6825
6   x[3,'B']    0         -17.6825
7   x[4,'A']    7.00869     1.42109e-14
8   x[4,'B']   42.1659      1.42109e-14
;

:    _varname   _var.down _var.current   _var.up     :=
1   x[1,'A']       80         80         96.0256
2   x[1,'B']   -1e+20         80         80
3   x[2,'A']      150        150        390.526
4   x[2,'B']   -1e+20        150        150
5   x[3,'A']   -1e+20         70         87.6825
6   x[3,'B']   -1e+20         70         87.6825
7   x[4,'A']      260        260        260
8   x[4,'B']      260        260        260
;

:        _conname          _con.slack       _con.dual       :=
1   bvk_maxtid['A']        0               -1.77636e-15
2   bvk_maxtid['B']       37.8341           0
3   bvk_ravaror['R1']      0              24.5526
4   bvk_ravaror['R2']    130.495            0
5   bvk_ravaror['R3']      1.13687e-13    11.6334
6   bvk_ravaror['R4']      2.27374e-13     9.92615
;

:        _conname         _con.down _con.current     _con.up     :=
1   bvk_maxtid['A']       49.9131       120         541.659
2   bvk_maxtid['B']       42.1659        80        1e+20
3   bvk_ravaror['R1']    120.455        300         449.23
4   bvk_ravaror['R2']    369.505        500        1e+20
5   bvk_ravaror['R3']    155.355        600         906.04
6   bvk_ravaror['R4']    620           1000        1524.72
;
```

a) I nuvarande optimallösning produceras inga enheter av produkt 3. Vid vilken vinst kommer produktion av produkt 3 att bli lönsam? (1p)

   Reducerad kostnad är 17,6825. Vinsten måste öka med åtminstone det, till 87,6825.

b) Maskin B måste repareras och får en sänkt kapacitet till 30 tillgängliga timmar. Hur påverkas målfunktionsvärdet? (2p)

   30 ligger utanför intervallet för maskin B. Det är en restriktion av ett max-problem, målfunktionsvärdet kommer att minska eller vara oförändrat. Dock vet vi inte med hur mycket utan en reoptimering.

c) Ett annat företag erbjuder att förse företaget med 600 enheter av råvara R_4, till en kostnad av 5000 kr. Bör företaget anta erbjudandet? (2p)

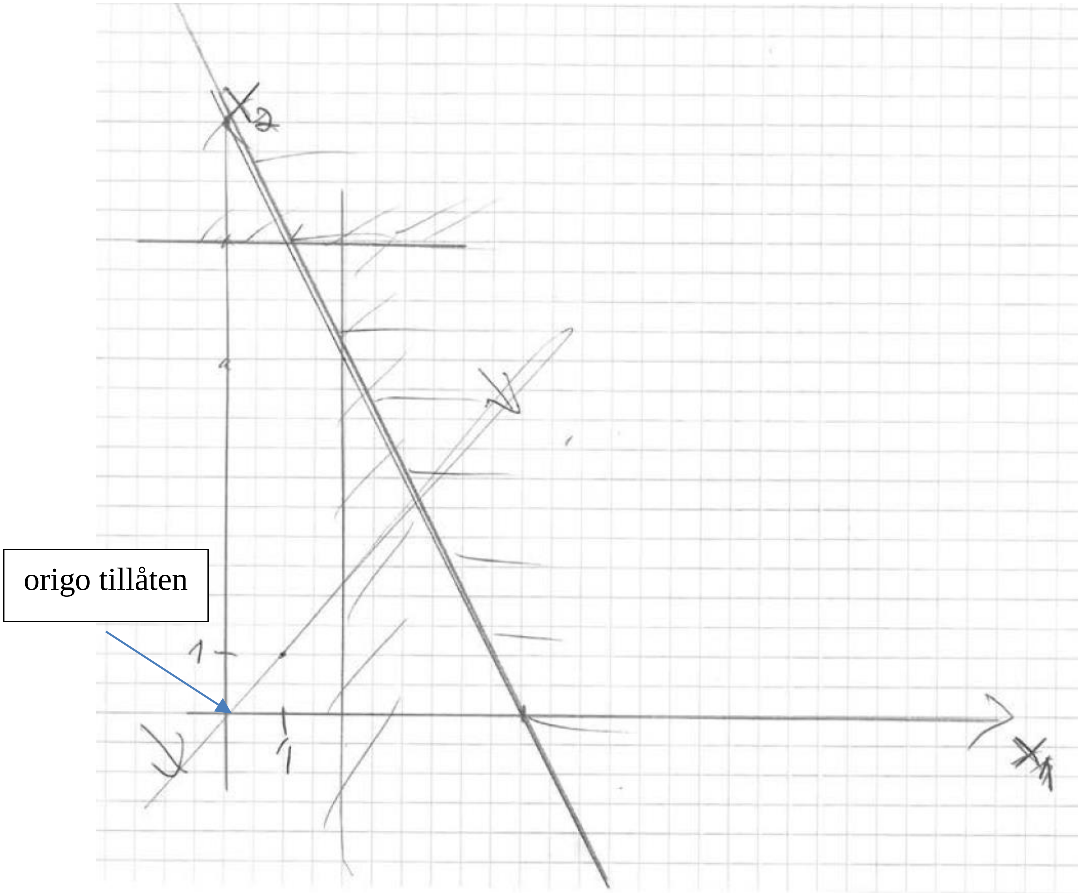
   Ja, erbjudandet bör antas. Vi vet att målfunktionsvärdet kommer att öka med *minst* 524,72*9,92615=5208,45 kr och *mest* 600*9,92615=5955,69 kr.

(5p) Uppgift 3

Betrakta följande optimeringsproblem

$$
\begin{array}{llcl}
\max z = & x_1 - x_2 & & \\
\text{då} & 2x_1 + x_2 & \leq 10 & (1) \\
 & x_1 & \leq 2 & (2) \\
 & x_2 & \leq 8 & (3) \\
 & & & \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Besvara följande påståenden med sant eller falsk, samt motivering till varför. Varje korrekt motiverat svar ger 1p. *Tips: Illustrera problemet grafiskt, och utgå ifrån illustrationen för att motivera dina svar.*



a) Origo ($x = \binom{0}{0}$) utgör en tillåten lösning till problemet

Sant, se skiss.

b) Problemet har fyra tillåtna baslösningar

Falskt, i figuren ovan kan man räkna till fem tillåtna baslösningar (hörnpunkter)

c) Problemet har en unik optimallösning

Sant, vid grafisk lösning erhålls punkten (2,0) som enda optimallösning

d) Punkten $x = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ är en optimallösning till problemet

Falskt, vid grafisk lösning erhålls punkten (2,0) som enda optimallösning

e) Om vi byter ut målfunktionen till

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

så har problemet minst en heltalig optimallösning oavsett vilka värden som sätts in på c_1 och c_2

Sant, samtliga tillåtna baslösningar är heltaliga, därmed kommer alltid minst en optimallösning att vara heltalig.

(5p) Uppgift 4

Betrakta följande optimeringsproblem

$$\min z = 2x_1 + x_2 - 4x_3$$

$$\begin{aligned} \text{då} \quad -2x_1 \quad\quad + 2x_3 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 + \quad x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Skriv om problemet på standardform och ställ upp en initial simplextablå med punkten $= \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ som baslösning. (1p)

b) Gör en iteration med simplexmetoden, dvs. bestäm inkommande och utgående basvariabler samt uppdatera tablån med nya värden. (3p)

c) Bestäm aktuellt målfunktionsvärde för den nya lösningen och avgör om lösningen är optimal. (1p)

Standardform med x4 och x5 som slackvariabler.

z =	2.0 x1	+ x2	- 4.0 x3			
s.t.	- 2.0 x1		+ 2.0 x3	+ x4		= 10.0
	x1	- x2	+ x3		+ x5	= 8.0
	x1,	x2,	x3,	x4,	x5	>= 0

Initial tablå

Bas	z	x1	x2	x3	x4	x5	b
z	1	-2.000	-1.000	4.000	0	0	0
x4	0	-2.000	0	2.000	1	0	10.000
x5	0	1	-1.000	1	0	1	8.000

Inkommande x3, utgående x4

Ny tablå

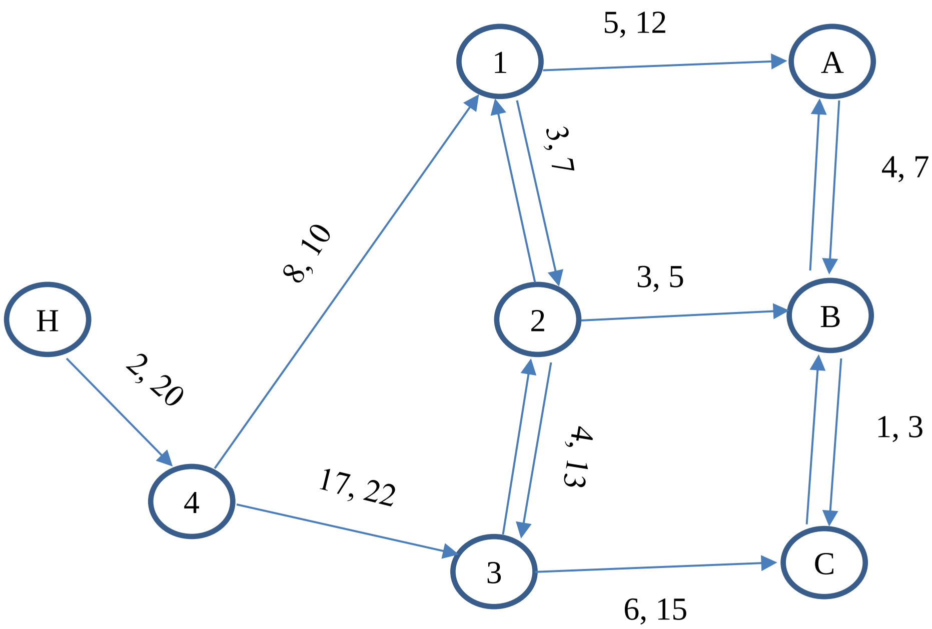
Bas	z	x1	x2	x3	x4	x5	b
z	1	2.000	-1.000	0	-2.000	0	-20.000
x3	0	-1.000	0	1	0.500	0	5.000
x5	0	2.000	-1.000	0	-0.500	1	3.000

Aktuellt målfunktionsvärde: -20

Lösningen ej optimal ty red. kost. för x1 är negativ.

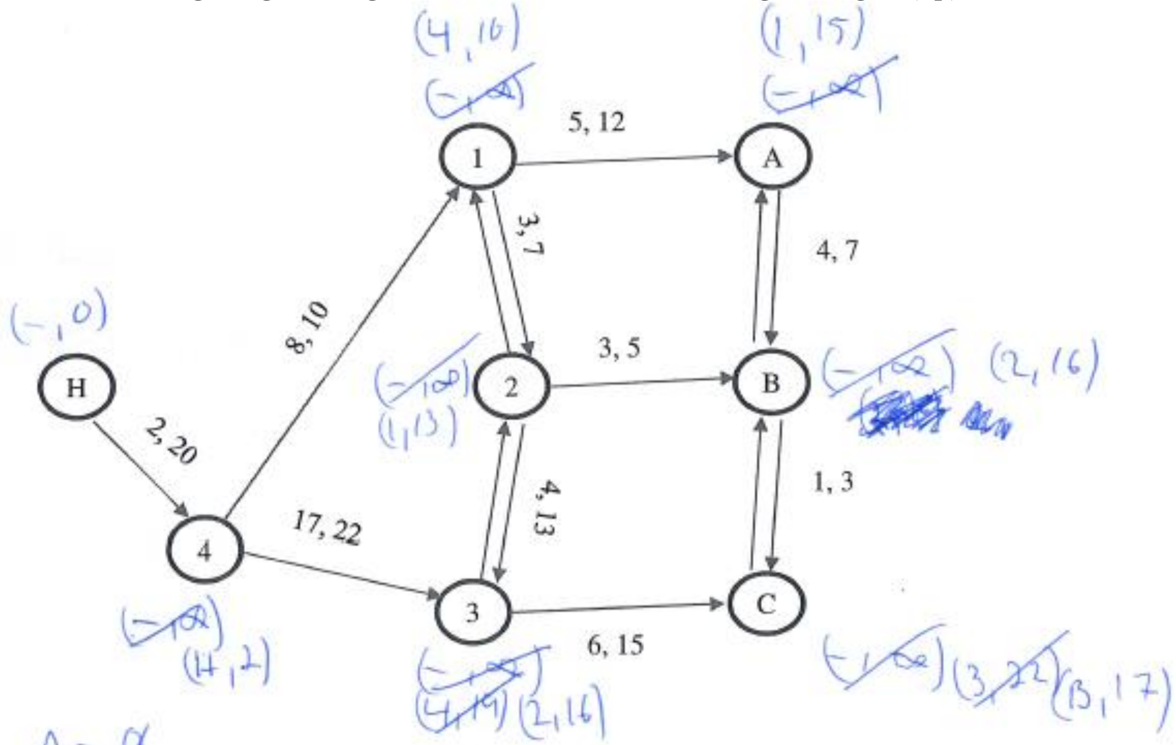
(5p) Uppgift 5

Betrakta följande nätverk som illustrerar ett kanalsystem. Noden markerad med ”H” är en hamn där omlastning sker från större fartyg för vidare transport till slutdestination uppströms. Övriga noder markerade med bokstäver är platser är destinationer för transporter på kanalerna. Numrerade noder är endast punkter där kanalen delas. På varje båge finns kanalsektionens längd (i km) samt maximal höjd (i meter) på fartyg som kan passera under broarna som finns på sektionen. Den första siffran är längd och den andra siffran är höjd, på varje båge. Notera att på vissa sektioner är endast enkelriktad fartygstrafik tillåten, men där dubbelriktad trafik är tillåten är längd och höjd samma för båda riktningar.



Din uppgift är att utifrån metoder presenterade på kursen

a) bestämma den kortaste vägen från hamnen (H) till samtliga destinationer, för varje destination ange vägens längd samt vilka sektioner som ingår i vägen (3p)



A = ∅
D = (A, B, C, H, 1, 2, 3, 4)

A = (H) Nod 4 uppdateras
D = (A, B, C, 1, 2, 3, 4)

A = (H, 4) Nod 1 och 3 uppdateras
D = (A, B, C, 1, 2, 3)

A = (H, 4, 1) Nod A och 2 uppdateras
D = (A, B, C, 2, 3)

A = (H, 4, 1, 2) Nod B och 3 uppdateras
D = (A, B, C, 3)

A = (H, 4, 1, 2, A) Ingen nod uppdateras
D = (B, C, 3)

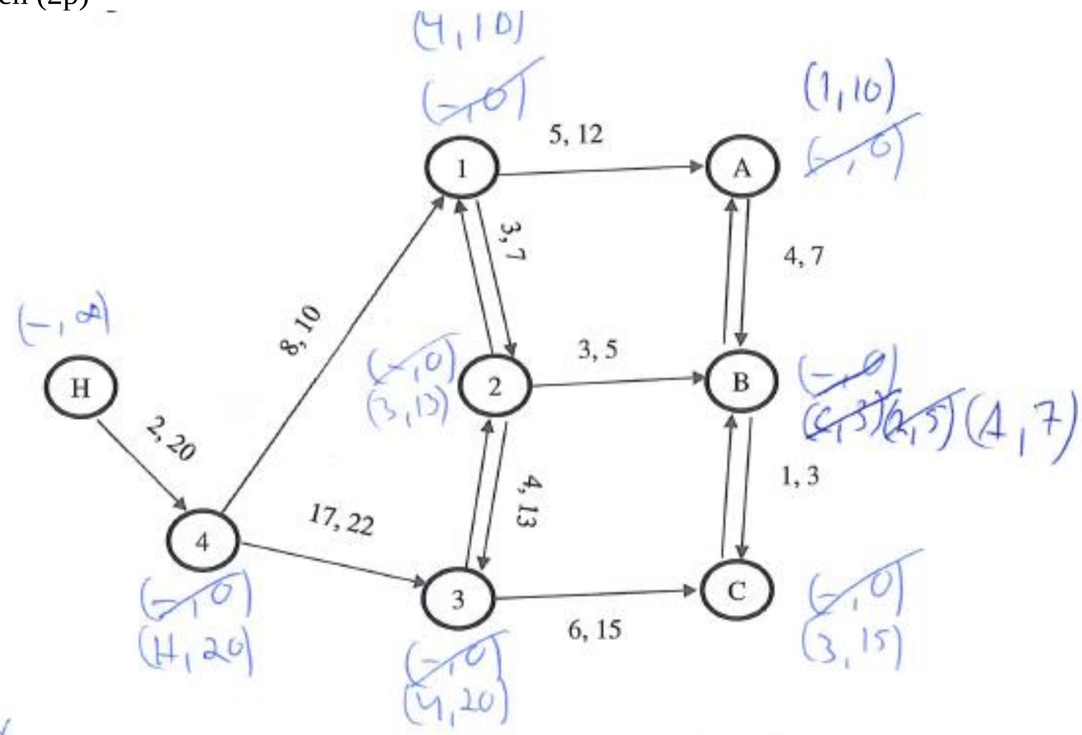
A = (H, 4, 1, 2, A, 3)
D = (B, C) Nod C uppdateras

A = (H, 4, 1, 2, A, 3, B)
D = (C) Nod C uppdateras

A = (H, 4, 1, 2, A, 3, B, C)
D = ∅ Klar

H→A: H-4-1-A, 15
H-B: H-4-1-2-B, 16
H-C: H-4-1-2-B-C, 17

b) bestämma den maximala fartygshöjden som kan nå fram till varje destinationsnod från hamnen (H), för varje destination ange fartygshöjd samt vilka sektioner som ingår i vägen (2p)



$A = \emptyset$
$D = (A, B, C, H, 1, 2, 3, 4)$

$A = (H)$ uppdatera nod 4
$D = (A, B, C, 1, 2, 3, 4)$

$A = (H, 4)$ uppdatera nod 1 och 3
$D = (A, B, C, 1, 2, 3)$

$A = (H, 4, 3)$ uppdatera nod 2 och C
$D = (A, B, C, 1, 2)$

$A = (H, 4, 3, C)$ uppdatera nod B
$D = (A, B, 1, 2)$

$A = (H, 4, 3, C, 2)$ uppdatera nod B
$D = (A, B, 1)$

$A = (H, 4, 3, C, 2, 1)$
$D = (A, B)$ uppdatera nod A

$A = (H, 4, 3, C, 2, 1, A)$
$D = (B)$ uppdatera nod B

$A = (H, 4, 3, C, 2, 1, A, B)$
$D = \emptyset$ stopp

H -> A : H-4-1-A : 10
H -> B : H-4-1-A-B : 7
H -> C : H-4-3-C : 15