Svar till tenta i analys III, TNA006, 180105

1. (a) Det är en nivåyta, låt $F(x, y, z) = xe^x - \sin(yz)$. En normalvektor får vi av gradienten

$$\nabla F = (e^x + xe^x,\ -z\cos(yz),\ -y\cos(yz)), \quad \nabla F(0, \pi, 2) = (1, -2, -\pi)$$

Tangentplanet är

$$x - 2(y - \pi) - \pi(z - 2) = 0$$

Svar: Tangentplanet: $x - 2y - \pi z = -4\pi$

(b) Vi avgör om $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$:

$$\rho(h,k) = \frac{f(1+h, -1+k) - \left[f(1,-1) + hf'_x(1,-1) + kf'_y(1,-1)\right]}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Här är $f(1, -1) = 0$, $f'_x = 1+y$, $f'_x(1, -1) = 0$, $f'_y = x$, $f'_y(1, -1) = 1$.

$$\rho(h,k) = \frac{1 + h + (1+h)(-1+k) - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{1 + h - 1 + k - h + hk - k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

För att avgöra om gränsvärdet existerar byter vi till polära koordinater, $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$.

$$\rho(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r} = r\sin\theta\cos\theta \to 0 \text{ då } r \to 0 \text{ oberoende av } \theta$$

Svar: f är differentierbar i den givna punkten.

2. Sök stationära punkter: $\nabla f = (4x - 12y,\ -12x + 36y^3)$ det ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 4x - 12y = 0 \\ -12x + 36y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ -x + 3y^3 = 0 \end{cases}$$

Vi har att $x = 3y$ vilket ger att $-3y + 3y^3 = 0$ och att $3y(y^2 - 1) = 0$. Lösningar är då $y = 0$ och $y = \pm 1$. Stationära punkter är då $(0, 0)$, $\pm(3, 1)$.

För att avgöra karaktären studeras den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = h^2 f''_{xx}(a,b) + 2hkf''_{xy}(a,b) + k^2 f''_{yy}(a,b).$$

Vi har att $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = -12$, $f''_{yy} = 108y^2$

Punkten (0,0)

$$Q(h,k) = 4h^2 - 24hk = 4((h-3k)^2 - 9k^2).$$

Vilket är en indefinit kvadratisk form och $(0,0)$ är en sadelpunkt.
Punkten $\pm(3,1)$

$$Q(h,k) = 4h^2 - 24hk + 108k^2 = 4((h-3k)^2 - 9k^2) + 108k^2 = 4(h-3k)^2 + 72k^2.$$

Vilket är en positivt definit kvadratisk form och $\pm(3,1)$ är lokala minima.

Svar: Funktionen har två lokala minima i punkterna $(3,1)$ och $(-3,-1)$.

3. Funktionen är kontinuerlig och området är kompakt, alltså kommer största och minsta värde att antas.

   Stationära punkter: $\nabla f = 0$ ger systemet

$$\begin{cases} (1-2x(x+2y))e^{-x^2-y^2} = & 0 \\ (2-2y(x+2y))e^{-x^2-y^2} = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1-2x(x+2y) = & 0 \\ 2-2y(x+2y) = & 0 \end{cases}$$

   Eftersom $e^{-x^2-y^2} \neq 0$. $(2) - 2(1)$ ger att $0 = 4x(x+2y) - 2y(x+2y) = 2(x+2y)(2x-y)$.

   Om $x + 2y = 0$ ger ekvationssystemet det orimliga villkoret att 1=0. Inga lösningar i det fallet.

   Om $2x - y = 0$ så är $y = 2x$ vilket ger att $1 - 10x^2 = 0$ eller $x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$.

   Det finns alltså två stationära punkter $\pm(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$.

   Singulära punkter: Finns inga då f är kontinuerligt deriverbar.

   Randen $x^2 + y^2 = 1$: På randen är $f = h(x,y) = (x+2y)e^{-1}$. Vi skall bestämma max/min av h då $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. En möjlighet är då att ∇h är parallell med ∇g, vilket inträffar då

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y - 4x$$

   Dvs då $y = 2x$. Då måste $5x^2 = 1$. Intressanta punkter är $\pm(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

   Andra punkter av intresse saknas, stationära finns inga, ändpunkter saknas, punkter där $\nabla g = 0$ är inte på enhetscirkeln. **Slutsats:**

$$f(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}) = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2} = \sqrt{\frac{5}{2}}e^{-1/2}, \quad f(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}) = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2} = -\sqrt{\frac{5}{2}}e^{-1/2}$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{5}{\sqrt{5}}e^{-1} = \sqrt{5}e^{-1} \quad f(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{5}{\sqrt{5}}e^{-1} = -\sqrt{5}e^{-1}$$

Svar: Största värdet är $\sqrt{\frac{5}{2}}e^{-1/2}$ och minsta värdet är $-\sqrt{\frac{5}{2}}e^{-1/2}$.

4. Byter till polära koordinater, D motsvaras av att $0 < r < 3$ och $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\iint_D \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^3 \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{(1+r^2)^2}rdr\right)d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^3 \frac{r^2}{(1+r^2)^2}rdr = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\int_0^9 \frac{t}{(1+t)^2}\frac{dt}{2} =$$

Med byte $t = r^2$

$$\frac{1}{4}\int_0^9 \frac{1+t-1}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{4}\int_0^9 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}dt =$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\right]_0^9 = \frac{1}{4}\left(\ln 10 + \frac{1}{10} - 1\right) = \frac{\ln 10}{4} - \frac{9}{40}$$

Svar: Integralens värde är $\frac{\ln 10}{4} - \frac{9}{40}$

5. Mängden där vi söker det största och minsta värde på är inte kompakt.

Låt bivillkoren vara $g(x,y,z) = x^2+y^2-1 = 0$ och $h(x,y,z) = yz-1 = 0$. Finns ett antal fall att undersöka.

Gradienter i ett plan: Då ∇f, ∇g och ∇h ligger i ett plan gäller

$$0 = \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla h) = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & z \\ x & y & 0 \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = 4xz^2$$

Där $x = 0$: Då är $y = \pm 1$ och $z = y$. Punkter $\pm(0,1,1)$

Där $z = 0$: Då fås villkoret $-1 = 0$. Inga punkter i detta fallet.

Singulära punkter: Funktionerna $, f, g, h$ är alla kontinuerligt deriverbara. Inga singulära punkter.

Ändpunkter: Mängden vi söker max/min på är ej kompakt. Vi kan ta $z \to \pm\infty$ med $y = 1/x$ och ha x som uppfyller att $x^2 + y^2 = 1$. Eftersom $f = x^2 + y^2 + z^2$ har vi att $f \to \infty$ i dessa fall.

Sammanfattning:

$$f(0,1,1) = f(0,-1,-1) = 2.$$

Svar: Största värde saknas, minsta värdet är 2.

6. Låt $F(x,y,z) = \sin(xyz) - (x+y+z)$ då är $F'_z = xy\cos(xyz) - 1$ och $F'_z(1,-1,0) = -2 \neq 0$. Således definierar ekvationen $z(x,y)$ i en omgivning av $(1,-1,0)$.

   Vi ser också att $z(1,-1) = 0$. För att bestämma derivatorna deriverar vi implicit m.a.p. x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin(xyz)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x+y+z\Big)$$

   Som ger att

$$\cos(xyz)\big(yz + xyz'_x\big) = 1 + z'_x$$

   I punkten $(1,-1,0)$:

$$-z'_x(1,-1) = 1 + z'_x(1,-1) \quad \Rightarrow \quad z'_x(1,-1) = -\frac{1}{2}.$$

   För andraderivatan deriveras en gång till:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos(xyz)\big(yz + xyz'_x\big)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(1 + z'_x\Big)$$

   Vilket ger att

$$-\sin(xyz)\big(yz + xyz'_x\big)^2 + \cos(xyz)\big(2yz'_x + xyz''_{xx}\big) = z'_{xx}$$

   I punkten $(1,-1,0)$:

$$1 - z''_{xx}(1,-1) = z'_{xx}(1,-1) \quad \Rightarrow \quad z''_{xx}(1,-1) = \frac{1}{2}.$$

   Svar: Ekvationen $z(x,y)$ i en omgivning av $(1,-1,0)$ och $z(1,-1) = 0$, $z'_x(1,-1) = -\frac{1}{2}$ och $z''_{xx}(1,-1) = \frac{1}{2}$.

7. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}z'_u.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y}z'_u - \frac{1}{y^2}z'_v.$$

   Detta i differentialekvationen:

$$1 = x^2 z'_x + yz'_y = -z'_u + y\big(\frac{1}{y}z'_u - \frac{1}{y^2}z'_v\big) = -\frac{1}{y}z'_v$$

Vilket ger oss ekvationen $-vz'_v = 1$ eller $z'_v = -1/v$ som ger att $z = -\ln|v| + g(u)$. Lösningen är $z(x,y) = \ln|y| + g(\frac{1}{x} + \ln y)$.

Lösningen som uppfyller $z(x,1) = \ln x$:

Vi har att $z(x,1) = g(\frac{1}{x}) = \ln x$. Alltså är $g(x) = -\ln x$. **Svar:** Lösningen är $z(x,y) = \ln|y| + g(\frac{1}{x} + \ln y)$ respektive $z(x,y) = \ln|y| - \ln(\frac{1}{x} + \ln y)$.