

TSKS21 Signaler, information & bilder

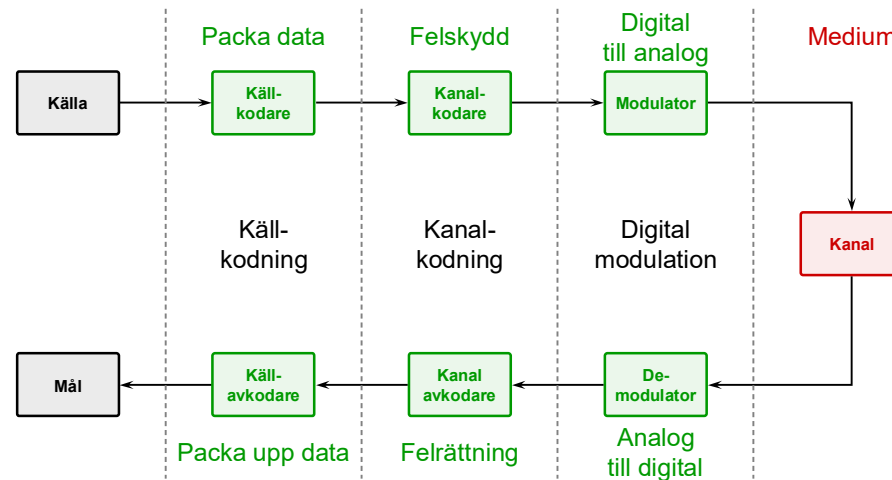
Föreläsning 12

Informationsteori – kanalkodning

Mikael Olofsson
 Institutionen för Systemteknik (ISY)
 Ämnesområdet Kommunikationssystem

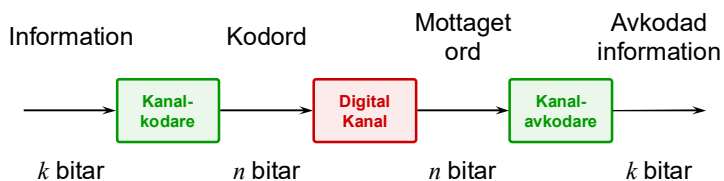


Ett envägstelekomunikationssystem



TSKS21 Signaler, information och bilder - Föreläsning 11
 2019-02-20 2

Block-koder Grundidé



Beräkna r paritetsbitar från k informationsbitar.

Skicka $n = k + r$ kodordsbitar.

Mottaget: n eventuellt felaktiga bitar.

Avkoda till det mest troliga sända kodordet givet de mottagna bitarna.

Mer generellt:
 Avbilda k informationsbitar
 på $n = k + r$ kodordsbitar.

Om kodorden är välvalda, då kommer vi att kunna korrigera fel.



TSKS21 Signaler, information och bilder - Föreläsning 11
 2019-02-20 3

Block-kod – Mängd av binära vektorer

Kod: $\mathcal{C} = \{\bar{c}_i \in \{0,1\}^n\}_{i=1}^{2^k}$

Kodord: $\bar{c}_i = (c_{i,1}, \dots, c_{i,n})$
 $c_{i,j} \in \{0,1\}$

Takt: $R = \frac{k}{n}$

Example code:

Information	Codeword
00	10101010
01	11010000
10	01100111
11	00011101

$k = 2$ $n = 8$

Principer för avkodning:

Anta att alla fel är lika allvarliga.

⇒

Välj det mest troliga kodordet givet den mottagna vektorn.



TSKS21 Signaler, information och bilder - Föreläsning 11
 2019-02-20 4

Avkodning

Stokastiska variabler: Sämt kodord: \bar{C}
 Mottaget ord: \bar{X}

MAP-avkodning (Maximim À-Posteriori):

Avkodningsregel 1: Sätt $\hat{c} = \bar{c}_i$ om $\Pr\{\bar{C} = \bar{c}_k | \bar{X} = \bar{x}\}$ maximeras för $k = i$.

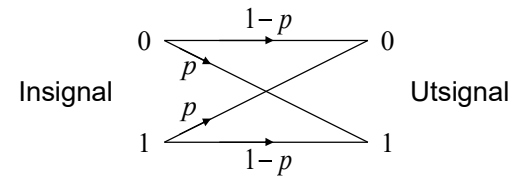
Bayes regel \Rightarrow

Avkodningsregel 2: Sätt $\hat{c} = \bar{c}_i$ om $\Pr\{\bar{C} = \bar{c}_k\} \Pr\{\bar{X} = \bar{x} | \bar{C} = \bar{c}_k\}$ max för $k = i$.

ML-avkodning ($\Pr\{\bar{C} = \bar{c}_k\} = 1/2^k$) (Maximum Likelihood):

Avkodningsregel 3: Sätt $\hat{c} = \bar{c}_i$ om $\Pr\{\bar{X} = \bar{x} | \bar{C} = \bar{c}_k\}$ maximeras för $k = i$.

Binärsymmetriska kanaler (BSC)



Konsekutiva användningar av kanalen är oberoende.

Hammingavstånd: $d_H(\bar{a}, \bar{b})$ # positioner där \bar{a} och \bar{b} är olika.
 Egenskaper: $d_H(\bar{a}, \bar{a}) = 0$ $d_H(\bar{a}, \bar{b}) \geq 0$ $d_H(\bar{a}, \bar{c}) \leq d_H(\bar{a}, \bar{b}) + d_H(\bar{b}, \bar{c})$
 Då får vi: $\Pr\{\bar{X} = \bar{x} | \bar{C} = \bar{c}_k\} = p^{d_H(\bar{x}, \bar{c}_k)} (1-p)^{n-d_H(\bar{x}, \bar{c}_k)}$

ML-avkodning för BSC med felsannolikhet p (vi antar $0 < p < 0.5$):

Avkodningsregel 4: Sätt $\hat{c} = \bar{c}_i$ om $d_H(\bar{x}, \bar{c}_k)$ minimeras för $k = i$.

Exempel på avkodning

Information	Kodord
00	10101010
01	11010000
10	01100111
11	00011101

$k = 2$ $n = 8$

$d_H(10101010, 11010000) = 5$
 $d_H(10101010, 01100111) = 5$
 $d_H(10101010, 00011101) = 6$
 $d_H(11010000, 01100111) = 6$
 $d_H(11010000, 00011101) = 5$
 $d_H(01100111, 00011101) = 5$

} Minavstånd $d = 5$

Avkodning: Välj närmaste kodord

(10111010) avkodas till (10101010)
 (11110111) avkodas till (01100111)
 (00111000) är på avstånd 3 från både
 (10101010) & (00011101)

Felrättningsförmåga

$$t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \quad \text{Här } t = 2$$

Feldetekteringsförmåga

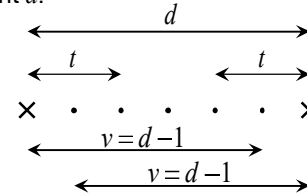
$$v = d - 1 \quad \text{Här } v = 4$$

Förmåga att rätta och detektera fel

Felrättningsförmåga: $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ Kodan kan rätta varje w -bitars fel om $w \leq t$.

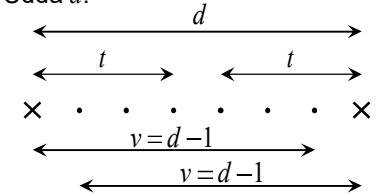
Feldetekteringsförmåga: $v = d - 1$ Kodan kan detektera varje w -bitars fel om $w \leq v$.

Jämnt d :



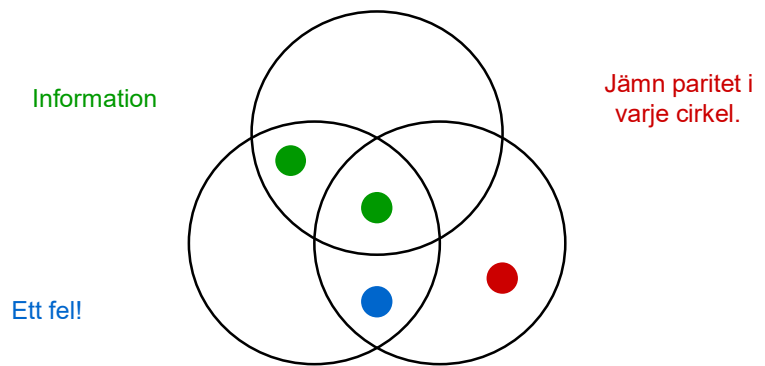
$$t = \frac{d-2}{2}$$

Udda d :



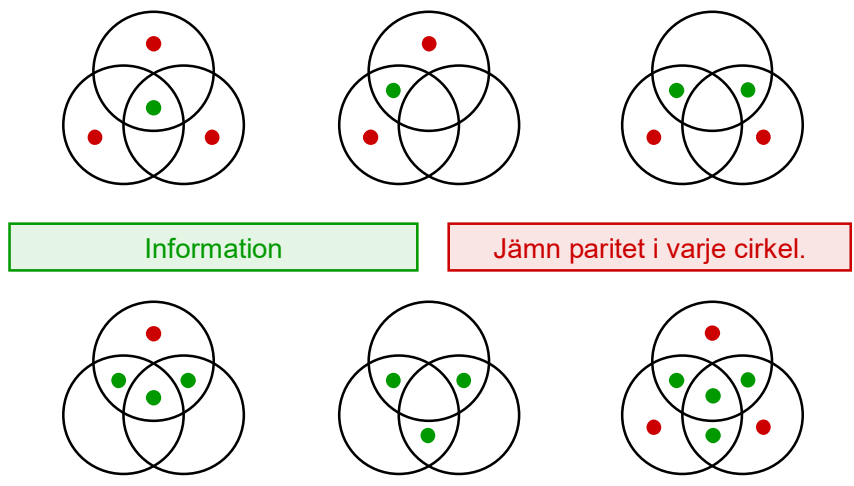
$$t = \frac{d-1}{2}$$

Hamming-[7,4]-koden Exempel

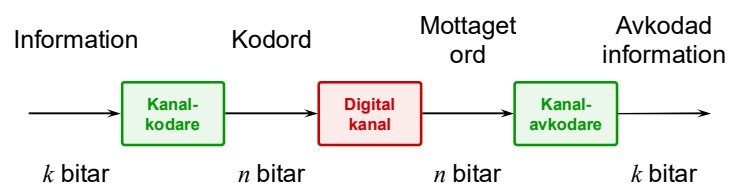


Resultat: Jämn paritet i den övre cirkeln, udda paritet i de andra två cirkelarna. Endast en position kan förklara det – det faktiska felet.

Hamming-[7,4]-koden – Fler exempel



Block-koder Gränser

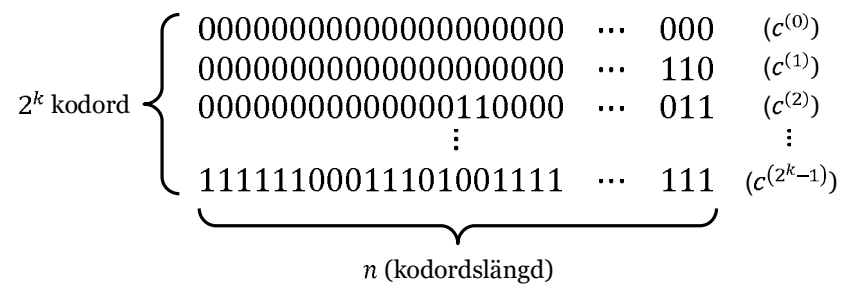


Kanalkodningssatsen (slarvig formulering):

För varje kanal finns det ett C , som vi kallar kanalens kapacitet, och om vi kommunicerar med en takt R så går det att kommunicera med godtyckligt låg resulterande felsannolikhet så länge vi har $R < C$.

Takt: $R = \frac{k}{n}$

Kod med takt $R = k/n$ bpcu



Alla koder med takt $R = k/n$ bpcu

$C_0:$	$C_1:$	$C_2:$	$C_3:$																																																												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> </table>	000	...	000	000	...	000	000	...	000	⋮			000	...	000	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>001</td></tr> </table>	000	...	000	000	...	000	000	...	000	⋮			000	...	001	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>010</td></tr> </table>	000	...	000	000	...	000	000	...	000	⋮			000	...	010	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>011</td></tr> </table>	000	...	000	000	...	000	000	...	000	⋮			000	...	011
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
⋮																																																															
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
⋮																																																															
000	...	001																																																													
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
⋮																																																															
000	...	010																																																													
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
000	...	000																																																													
⋮																																																															
000	...	011																																																													
• • •	$C_i:$	• • •	$C_{2^{kn}-1}:$																																																												
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>000</td><td>...</td><td>000</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>110</td></tr> <tr><td>000</td><td>...</td><td>011</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>111</td><td>...</td><td>111</td></tr> </table>	000	...	000	000	...	110	000	...	011	⋮			111	...	111		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>111</td><td>...</td><td>111</td></tr> <tr><td>111</td><td>...</td><td>111</td></tr> <tr><td>111</td><td>...</td><td>111</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">⋮</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>111</td><td>...</td><td>111</td></tr> </table>	111	...	111	111	...	111	111	...	111	⋮			111	...	111																														
000	...	000																																																													
000	...	110																																																													
000	...	011																																																													
⋮																																																															
111	...	111																																																													
111	...	111																																																													
111	...	111																																																													
111	...	111																																																													
⋮																																																															
111	...	111																																																													

Kanalkodningssatsen

För en kanal och givna konstanter $\delta > 0$ och $\gamma > 0$, så finns det en kodordslängd n och en kod av denna längd som har takt $R = C - \delta$ och som gör det möjligt att kommunicera med en resulterande felsannolikhet $P_e < \gamma$, där C är kanalens kapacitet.

Mikael Olofsson
ISY/KS

www.liu.se