Svar till tentamen i analys III, TNA006, 150108

1. (a) Låt $F(x,y) = 1 + \sin(xy) - e^{x+y}$. Då $F'_y(x,y) = x\cos(xy) - e^{x+y}$ och $F'_y(0,0) = -1 \neq 0$ går det att definiera y som en funktion av x i en omgivning av origo. Eftersom vi utgår från punkten $(0,0)$ är $y(0) = 0$. Implicit derivering ger

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(1+\sin(xy)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{x+y}\Big) \Leftrightarrow \cos(xy)\Big(y+xy'\Big) = e^{x+y}\Big(1+y'\Big)$$

Med $x = 0$ och $y(0) = 0$ får vi:

$$0 = 1 + y'(0).$$

Alltså är $y'(0) = -1$
Svar: Ja det går, och $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

(b) **Svar:** Taylorpolynomet är $p(x) = -x$.

2. (a) Låt $f(x,y) = xy^3$ då är $f(2,1) = 2$,

$$f'_x = y^3,\ f'_x(2,1) = 1,\ f'_y = 3xy^2,\ f'_y(2,1) = 6.$$

Tangentplanet blir då:

$$z = 2 + (x-2) + 6(y-1)$$

Svar: Tangentplanet är $z = 2 + (x-2) + 6(y-1)$.

(b) I punkten (a,b):

$$f(a,b) = ab^3,\ f'_x = y^3,\ f'_x(a,b) = b^3,\ f'_y = 3xy^2,\ f'_y(a,b) = 3ab^2.$$

Tangentplanet i en punkt (a,b) är

$$z = ab^3 + b^3(x-a) + 3ab^2(y-b)$$

Normalvektorn till planet är $(b^3, 3ab^2, -1)$ villkoret är då att följande vektorer skall vara parallella ger:

$$(b^3, 3ab^2, -1) = \lambda(1,1,-1) \quad \Rightarrow \quad b = 1, a = \frac{1}{3}.$$

Svar: Den sökta punkten är $(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3})$

3. Mängden är kompakt och funktionen f är kontinuerlig, alltså antas största och minsta värden.

   Stationära punkter: $\nabla f = 0$ ger

$$\begin{cases} f'_x &= 2xy = 0 \\ f'_y &= x^2 - 3y^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

   Första ekvationen ger att x eller y är noll.

   $x = 0$: ger att $-3y^2 + 3 = 0$ alltså $y = \pm 1$.

   $y = 0$: ger att $x^2 + 3 = 0$ vilket saknar reella lösningar.

   Ingen stationär punkt i området.

   Singulära punkter: Saknas då f deriverar i hela planet.

   Randen: Vi ser på tre olika linjer:

   - $y = x$, $0 \le x \le 2 : g_1(x) = f(x,x) = 3x$, största och minsta värde antas i ändpunkterna, dvs i hörnpunkter som vi tar upp senare.
   - $y = 2x$, $0 \le x \le 2 : g_2(x) = f(x, 2x) = -6x^3 + 6x$, vi har att $g_2'(x) = -18x^2 + 6$, största och minsta värde antas (då g_2 är kontinuerligt deriverbar) i ändpunkter (som vi tar senare) eller där $g_2' = 0$. $g_2'(x) = 6(-3x^2 + 1)$ som ger en ny punkt, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ eller $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$
   - $x = 2$, $2 \le y \le 4 : g_3(y) = f(2, y) = -y^3 + 7y$ bortsett från hörnpunkter har vi att lösa $g_3'(y) = -3y^2 + 7 = 0$ som ger att $y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$. Ingen av dessa punkter ligger i det intressanta intervallet.

   Hörnpunkter: $(0,0)$, $(2,2)$ och $(2,4)$

   Största och minsta värde kommer att antas bland:

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad f(0,0) = 0, \quad f(2,2) = 6, \quad f(2,4) = -36.$$

   Svar: Största värdet är 6, minsta värdet är -36.

4. Vi gör ett variabelbyte: $u = xy$ och $v = y/x$, Jacobianen blir

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v$$

   Området efter variabelbytet är $E: \ 1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 4$.

$$\iint_D x^2 y^2 dxdy = \iint_E u^2 |\frac{d(x,y)}{d(u,v)}| dudv = \iint_E \frac{u^2}{2v} dudv =$$

$$= \int_1^4 \Big(\int_1^2 \frac{u^2}{2v} du \Big) dv = \int_1^4 \left[\frac{u^3}{6v} \right]_1^2 dv = \int_1^4 \frac{7}{6v} dv = \left[\frac{7}{6} \ln |v| \right]_1^4 = \frac{7}{6} \ln 4$$

Svar: $\iint_D x^2 y^2 dx dy = \frac{7}{6} \ln 4$

5. Skärningen mellan ytorna fås ur ekvationen

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2y^2 = 4$$

Om vi låter D_1 vara området $x^2 + 2y^2 \leq 4$ får vi

$$\iiint_D x^2 dx dy dz = \iint_{D_1} x^2 \Bigg(\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \Bigg) dx dy = \iint_{D_1} x^2 \Big[z \Big]_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dx dy =$$

$$= \iint_{D_1} x^2 \Bigg(8 - x^2 - y^2 - x^2 - 3y^2 \Bigg) dx dy = \iint_{D_1} x^2 \big(8 - 2x^2 - 4y^2 \big) dx dy =$$

Vi byter till elliptiska koordinater, $x = r\cos\theta$, $y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin\theta$ och får Jacobianen till $\frac{r}{\sqrt{2}}$ och området till $0 < r \leq 2$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \Bigg(\int_0^2 r^3 \sin^2\theta \Big(8 - 2r^2 \Big) dr \Bigg) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \Bigg(\int_0^2 \big(8r^3 - 2r^5 \big) dr \Bigg) d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} \left[2r^4 - \frac{1}{3} r^6 \right]_0^2 = \frac{32\pi}{3\sqrt{2}}.$$

Svar: $\iiint_D x^2 dx dy dz = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

6. Kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = z'_u + z'_v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = e^y z'_u - e^y z'_v.$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} = \frac{\partial (z'_u + z'_v)}{\partial x} = \frac{\partial z'_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_v}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}.$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial z'_y}{\partial y} = \frac{\partial (e^y z'_u - e^y z'_v)}{\partial y} = e^y z'_u - e^y z'_v + e^y \left(\frac{\partial z'_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - e^y \left(\frac{\partial z'_v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_v}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) =$$

$$e^y \Bigg(z'_u - z'_v \Bigg) + e^y \Bigg(e^y z''_{uu} - e^y z''_{uv} \Bigg) - e^y \Bigg(e^y z''_{vu} - e^y z''_{vv} \Bigg) =$$

$$= e^y\left(z'_u - e^y z'_v\right) + e^{2y}\left(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}\right).$$

Detta insatt i PDEn ger att:

$$e^{2y}z''_{xx} - z''_{yy} + z'_y = e^{2y}\left(z''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv}\right) - e^y\left(z'_u - z'_v\right) - e^{2y}\left(z''_{uu}-2z''_{uv}+z''_{vv}\right) + e^y z'_u - e^y z'_v =$$

$$= 4e^{2y}z''_{uv} = 0$$

Vilket ger oss att $z''_{uv} = 0$, då $e^{2y} \neq 0$. Lösningar är då $z = f(u) + g(v)$, eller,

Svar: Lösningar är $z(x, y) = f(x + e^y) + g(x - e^y)$, där f och g är godtyckliga funktioner i $\mathcal{C}^2$.

7. Vi vill hitta det minsta värdet som $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ antar då $g(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$, och $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. Det är ett optimeringsproblem med två bivillkor. Vi ser att skärningen blir en sluten och kompakt mängd (motivera!) Då vet vi att ett minsta värde säkert antas.

   Ett av alternativen där minsta värdet antas är då gradienterna till funktionerna är parallella:

$$0 = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - y & 2y - x & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & z \\ -y & -x & -2z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 4(x^2z - y^2z) = 4z(x-y)(x+y)$$

   Vi får tre fall:

   $z = 0$ Bivillkoren ger då $x^2 + y^2 = 1$ och $xy = 0$, vilket har lösningar $\pm(1, 0, 0)$ och $\pm(0, 1, 0)$.

   $y = x$ Bivillkoren ger då att $2x^2 = 1$ och $x^2 - z^2 = 1$ som ger att $z^2 = -\frac{1}{2}$ vilket saknar reella lösningar.

   $y = -x$ Bivillkoren ger då att $2x^2 = 1$ och $3x^2 - z^2 = 1$ som ger att $z^2 = \frac{1}{2}$, lösningar är $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

   Andra alternativ är då någon av gradienterna singulära, vilket inte är fallet här. Här har vi inte heller några ändpunkter på skärningskurvan. Alltså antas minsta värdet i någon av punkterna ovan. Jämför:

$$f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = 1, \quad f((\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}.$$

   De övriga punkterna ovan ger samma avstånd som dessa.

   Svar: Minsta avståndet till origo är 1, punkterna där detta avstånd antas är $\pm(1, 0, 0)$ och $\pm(0, 1, 0)$