INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Kontrollskrivning 1 – 2015

Envariabelanalys del 2

Kurskod:	TNIU23
Examination:	KTR1
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall
Skrivtid:	2015-02-11 kl 08:00-10:00

1.

Beräkna

a) $\int \frac{4}{x^2+6x+8} dx$

Ledning: $\int \frac{4}{x^2+6x+8} dx = |\text{PBU}| = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{2}{x+4}\right) dx$

$= 2\ln|x+2| - 2\ln|x+4| + C$

$= 2\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$

b) $\int \frac{4x+3}{1+x^2} dx$

Lösning: $\int \frac{4x+3}{1+x^2} dx = 2\ln(1+x^2) + 3\arctan x + C$

c) $\int 2x \tan x^2 \, dx$

Lösning: $\int 2x \tan x^2 \, dx = \left|\begin{matrix}\text{Kedjeregeln} \\ \text{baklänges}\end{matrix}\right| = \int \tan y \, dy$

$= -\int \frac{-\sin y}{\cos y} dy = -\ln|\cos y| + C = -\ln|\cos x^2| + C$

2. Beräkna

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \arctan t \, dt$$

med hjälp av bland annat derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler. Stöd resonemangen med en tydlig figur.

Lösning:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \arctan t\,dt = S'(x) = \begin{bmatrix}\text{Enligt derivatans} \\ \text{definition} \\ \text{Definition 4.1}\end{bmatrix} = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(S(x+h) - S(x)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h}\arctan t\,dt - \int_a^x \arctan t\,dt\right)$$

$$= \begin{bmatrix}\text{Enligt räknelag} \\ \text{6.2 (e) för} \\ \text{integraler}\end{bmatrix} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^x \arctan t\,dt + \int_x^{x+h}\arctan t\,dt - \int_a^x \arctan t\,dt\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\arctan t\,dt = \begin{bmatrix}\text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler}\end{bmatrix} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\underbrace{\arctan\xi\,\left((x+h)-x\right)}_{\substack{medelhöjd \\ ggr\ bredd}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\arctan\xi = \begin{bmatrix}\text{Tack vare} \\ \text{instängning av } \xi \\ \text{mellan } x \text{ och } x+h\end{bmatrix} = \lim_{\xi\to x}\arctan\xi$$

$$= \begin{bmatrix}\text{Tack vare att } f \\ \text{är kontinuerlig i } x\end{bmatrix} = \arctan x$$

3. För naturliga tal n gäller att $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Visa med hjälp av en översumma och sambandet ovan att

$$\int_0^3 x^2 dx = 9$$

Ledning: Rita en figur med kurva $y = x^2$ och tillhörande övertrappa med n st delintervall. Översumma består av n st remsor med bredden $\frac{3}{n}$ vid positionerna $\frac{3i}{n}$ och resorna har höjderna $\left(\frac{3i}{n}\right)^2$

$$\int_0^3 x^2 dx = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{3i}{n}\right)^2\cdot\frac{3}{n}}_{\substack{remsors \\ höjd\ ggr \\ bredd}} = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \to 9 \text{ då } n\to\infty$$

4. Beräkna

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x + 1} dx$$

Lösning: Substitution med $y = \tan\frac{x}{2}$ ger

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2dy}{1 + y^2} = dx$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \cdots = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \cdots = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

Integralen löses nu enligt :

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x + 1} dx = \int \frac{\frac{2y}{1 + y^2}}{\frac{1 - y^2}{1 + y^2} + \frac{2y}{1 + y^2} + \frac{1 + y^2}{1 + y^2}} \cdot \frac{2dy}{1 + y^2} =$$

$$\ldots = \int \frac{2y}{(y + 1)(y^2 + 1)} dy = |\text{PBU}| = \int \left(\frac{-1}{y + 1} + \frac{y + 1}{y^2 + 1}\right) dy$$

$$= -\ln|y + 1| + \frac{1}{2}\ln|y^2 + 1| + \arctan y + C$$

$$= -\ln\left|\tan\frac{x}{2} + 1\right| + \frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2} + 1\right) + \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

Uttrycket kan förenklas ytterligare men detta duger.