

## Tentamen inom Matematisk Grundkurs

*Ordinarie tentamen för kursen HT 2016*

Kurskod: TNIU19  
Examination: TEN1  
Max: 18 p  
Betyg 5:  $\geq 15$  p  
Betyg 4:  $\geq 12$  p och minst 3 p på respektive Del I–III  
Betyg 3:  $\geq 9$  p och minst 2 p på respektive Del I–III  
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg 3 på tillhörande KTR1–KTR3  
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar  
Hjälpmedel: Inga  
Skrivtid: 2016-10-24, kl 08:00–13:00

---

### *Del I*

1. Vid betyg G på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

Rotgissning och polynomdivision ger  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  eller  $x_3 = 4$

- b) Lös olikheten

$$\frac{x^2 + 8x + 15}{x - 4} \geq 0$$

Faktorisering och teckenstudium ger  $x \in [-5, -3] \cup ]4, \infty[$

- c) Partialbråksuppdelning

$$\frac{7x + 10}{(x + 1)(x + 2)}$$

Rätt ansats följt av ekvationssystem eller handpåläggning ger  $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x+2}$

**3 p**

2. Lös olikheten

$$|x + 1| - |1 - x| < 0$$

Tre fall varav det vänstra ger "alla  $x$  inom intervallet", totalt får man  $x \in ]-\infty, 0[$

**3 p**

*Del II*

3. Vid betyg G på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Låt  $y = f(x) = \sqrt{x - 3}$ .

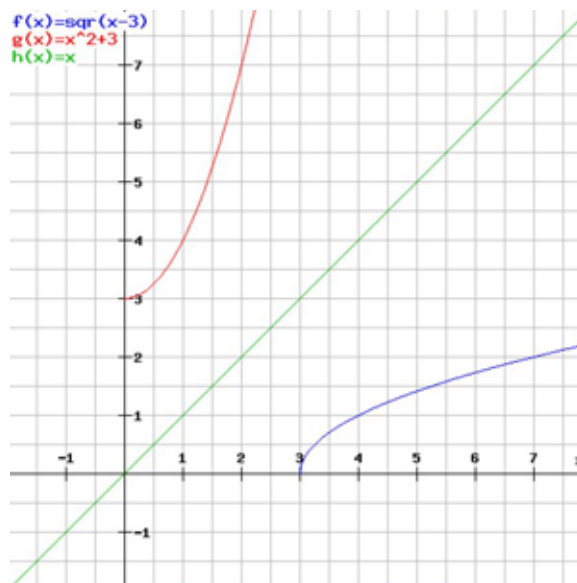
- a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

Svar:  $D_f = [3, \infty[$  och  $V_f = [0, \infty[$

- b) Bestäm inversen  $f^{-1}(x)$  och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar:  $f^{-1}(x) = x^2 + 3$ ,  $D_{f^{-1}} = [0, \infty[$  och  $V_{f^{-1}} = [3, \infty[$

- c) Skissa kurvorna till  $f(x)$  och  $f^{-1}(x)$  i samma koordinatsystem.



**3 p**

4.

Lös ekvationerna

a)  $\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$

Sambandet "cosinus för dubbla vinkeln" ger  $x = n\pi$  då  $n \in \mathbb{Z}$

b)  $\ln ex = 1 + \ln(2 - x)$

Med hjälp av andra logaritmlagen får man svaret  $x = 1$

c)  $\arcsin x = \arccos \sqrt{3}x$

En gemensam hjälptriangel med sidorna  $a = x$ ,  $b = \sqrt{3}x$  och  $c = 1$  ger med hjälp av Pythagoras sats  $x = \pm \frac{1}{2}$  varav endast  $x = \frac{1}{2}$  är av intresse då arcsin och arccos endast har överlappande värdemängd då  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**3 p**

---

### Del III

5. Vid betyg G på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Beräkna  $z^9$  om  $z = \sqrt{3} + i$

Polär form med  $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$  ger potensen  $z^9 = 2^9 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -512i$

b) Lös ekvationen  $z^2 + (2 + 2i)z + 9 + 2i = 0$

Kvadratkomplettering ger  $z = -1 - i \pm 3i$

c) Lös ekvationen  $2z^4 + 32 = 0$  och svara på formen  $a + bi$  (rektangulär form).

Svar:  $z = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$  eller  $z = \pm\sqrt{2} \mp \sqrt{2}i$

**3 p**

6.

a) Visa med hjälp av Eulers första formel att

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Summan av Eulers första formel och motsvarande konjugat ger sökt samband

b) Visa med hjälp av sambandet ovan att

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

Ledning: Utveckling av vänsterledet enligt

$$(\sin x)^3 = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix}) = \dots$$

ger efter förenkling

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} - \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} = \frac{3}{4} \cdot \sin x - \frac{1}{4} \cdot \sin 3x$$

vilket stämmer med högerledet

**3 p**