Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2015

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydligt angivna svar			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, passare, gradskiva, kurvmall			
Skrivtid:	2016-03-30, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Bestäm tangenten till kurvan $f(x) = 6x^2 - x^3$ i kurvans inflexionspunkt

(3 p)

Lösningstips: $f''(x)$ skiftar tecken i $x = 2$, $f'(2) = 12$ ger $k = 12$ som tillsammans med punkten $(2, 16)$ sätts in i $y = kx + m$ så att man får tangentens ekvation $y = 12x - 8$

2.

a) Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ till $f(x) = \ln x$.

Lösningstips: Derivatans definition ger

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

b) Bestäm med hjälp av invers funktion och kedjeregeln $f'(x)$ till $f(x) = \arctan x$.

Lösningstips: Invers till $y = \arctan x$ ger $\tan y = x$ som efter ledvis derivering med avseende på x ger $(1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx} = 1$ och med $\tan y = x$ får man $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

(3 p)

3. Låt $f(x) = x - 2\arctan x$

a) Bestäm eventuella asymptoter

Lösningstips: Metod – se exempel 4.28 i Läroboken.

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ respektive $\lim_{n\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ ger i båda fallen $k_1 = k_2 = 1$

som möjliga k-värden till två eventuella sneda asymptoter.

Vidare fås eventuella m-värden $\lim_{n\to\infty}(f(x) - x) = m_1 = -\pi$

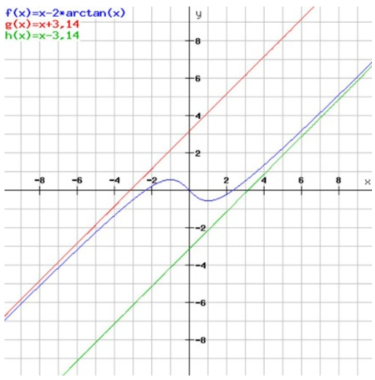
och $\lim_{n\to-\infty}(f(x) - x) = m_2 = \pi$. Sneda asymptoter existerar

alltså enligt $y = x - \pi$ då $x \to \infty$ och $y = x + \pi$ då $x \to -\infty$

b) Beräkna eventuella stationära punkter

Lösningstips: Derivering och teckenstudium av derivatan ger lokalt maximum i $\left(-1, \frac{\pi}{2} - 1\right)$ och lokalt minimum i $\left(1, 1 - \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Skissa kurvan till $f(x)$ med tillhörande asymptoter

Svar: 

(3 p)

4. Låt $f(x) = 2x - \sin x$

a) Visa att $f(x)$ är strängt växande

Lösningstips: $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ för alla x –värden

vilket visar att $f(x)$ är strängt växande.

b) Beräkna inversens derivata $(f^{-1})'(2\pi)$

Lösningstips: En bra skiss är att föredra vid exempelvis följande resonemang:

Spegling i $y = x$ ger $y = f(x)$ med spegelpunkt $(\pi, 2\pi)$ ty

endast $f(\pi) = 2x - \sin\pi = 2\pi - 0 = 2\pi$. I punkten $(\pi, 2\pi)$

får man $f'(\pi) = 2 - \cos\pi = 3$. En tangent i punkten $(\pi, 2\pi)$

har därmed $k = 3$. Spegling ger enligt sats $(f^{-1})'(2\pi) = \frac{1}{3}$.

(3 p)

5.

a) Definiera vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$

Lösningstips: Se definition 3.5 i läroboken samt isolerad punkt

b) Undersök om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i origo:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(x \sin \frac{1}{x^2}\right) & \text{då } x \neq 0 \\ 1 & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Lösningstips: Eftersom att $\sin \frac{1}{x^2}$ är en begränsad funktion kommer $x \underbrace{\sin \frac{1}{x^2}}_{\text{begr.}} \to 0$ då $x \to 0$. Därmed måste $\cos\left(x \sin \frac{1}{x^2}\right) \to 1$ då $x \to 0$.

Då detta överensstämmer med $f(0) = 1$ råder kontinuitet i origo.

(3 p)

6.

a) Härled formeln för partiell integration utifrån regeln för derivata av produkt.

Lösningstips: Härledning se föreläsning 12 med resultatet

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

b) Bestäm $\int e^{2x} \sin 2x \, dx$

Lösningstips: Partiell integration enligt sambandet ovan ger under ”andra varvet” tillbaka den ursprungliga integralen i HL – ”deja vu”. Denna flytas till vänsterledet och man får därmed svaret

$$\frac{e^{2x}}{4}(\sin 2x - \cos 2x) + C$$

(3 p)

7. En konservburk med formen av en rak cirkulär cylinder har volymen 1 dm³. Bestäm burkens minsta möjliga begränsningsarea (2 basytor + mantelyta).

Lösningstips: Inledande samband för volym, basyta, omkrets,

mantelyta och total area ställs upp: $\begin{cases} V = Bh \\ B = \pi r^2 \\ O = 2\pi r \\ M = 2\pi r h \\ A = 2B + M \\ V = 1 \end{cases}$

Alltså gäller för $r \neq 0$ att $V = Bh = 1 = \pi r^2 h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{\pi r^2}$

Man får $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$

Derivering ger $A'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}$

$A'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$

Teckenstudium visar att detta ger lokalt minimum

för detta värde och insättning ger minimala arean

$$A = 2B + M = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2 + \frac{2}{\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}} = 3\sqrt[3]{2\pi} \approx 5{,}54 \text{ dm}^2$$

(3 p)