Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2016

Examination: TEN 1, TNIU22
Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus: 0-2 p grundad på KTR1
Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.
Hjälpmedel: Skrivdon, passare, kurvmall och linjal
Skrivtid: 2017-01-10, kl. 08:00–13:00

1.

Låt $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$

a) Beräkna eventuella stationära punkter och avgör deras karaktär.

Lösningstips:

$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$ ger $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = 0$ då $x = 2$

som med teckenstudium inses vara lokalt minimum.

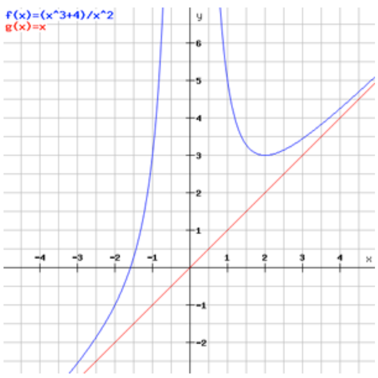
b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips: Gränsvärden då $x \to 0$ ger lodrät asymptot $x = 0$.

Sned asymptot $y = x$ fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken

eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa kurvan med tillhörande asymptoter.

Svar: 

(3 p)

2.

$$f(x) = x + x^{\frac{1}{3}}$$

a) Visa att $f(x)$ har invers.

Lösningstips: Eftersom att $f'(x) = 1 + \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} > 0$ för alla x följer enligt sats 4.8 att funktionen är strängt växande och därmed är funktionen omvändbar och har invers.

b) Beräkna $(f^{-1})'(10)$ för $f(x) = x + x^{\frac{1}{3}}$.

Lösningstips: Sats 4.6 eller resonemang utifrån symmetri med spegelpunkter ger $(f^{-1})'(10) = \frac{12}{13}$

(3 p)

3. Medelvärdessatsen för derivator

a) Vad säger satsen?

Lösningstips: Se sats 4.10 och föreläsning 9

b) Förklara med en skiss varför satsen inte gäller ifall funktionen inte är deriverbar i en eller flera inre punkter av aktuellt intervall.

Lösningstips: Se föreläsning 9

(3 p)

4.

a) Härled derivatan $f'(x)$ till $f(x) = x^2 + \ln 2x$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Derivatan kan härledas termvis (termen $\ln x$ med hjälp av standardgränsvärde) och man får $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

b) Härled derivatan $f'(x)$ till $f(x) = \arcsin x$ på valfritt sätt.

Lösningstips: $y = \arcsin x$ ger $\sin y = x$ för $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ledvis derivering (glöm ej inre derivatan) och "trigettan" ger sedan $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3 p)

5. Bestäm följande primitiva funktioner:

a)

$$\int \frac{4+8x}{1+x^2}\,dx$$

Lösningstips: Sats 5.2och Stas 5.3 ger $4\arctan x + 4\ln(1+x^2) + C$

b)

$$\int \cos x \sin x \, dx$$

Lösningstips: Partiell integration eller kedjeregeln baklänges eller variabelbyte eller ger $-\frac{\cos^2 x}{2} + C$ eller $\frac{\sin^2 x}{2} + D$ medan "dubbla vinkeln" ger $-\frac{\cos 2x}{4} + E$. De tre alternativen har konstanter förskjutna.

c)

$$\int e^{-x^2} 6x \, dx$$

Lösningstips: Kedjeregeln baklänges eller variabelbyte ger $-3e^{-x^2} + C$

(3 p)

6.

a) Ange vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$.

Lösningstips: Se Definition 3.5 som säger att gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$ i den aktuella punkten, eller att $x = a$ är en isolerad punkt.

b) Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{5x} - 1 - \ln(1+2x)}{x} & \text{då } x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, \infty\right[\\ A & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Lösningstips: Gränsvärdet $\lim_{x \to 0} f(x)$ bestäms med hjälp av standardgränsvärden och man får $A = 3$.

(3 p)

7. En plåtburk rymmer ca 0,4 liter dryck och har den exakta volymen $V = 128\pi$ cm³.
Beräkna minimal åtgång plåt till två basytor och en mantelyta hos burken med formen av en rak cirkulär cylinder.

Lösningstips:

$$\begin{cases} Volymen = V = 128\pi \ (\text{cm}^3) \\ Basytan = B = \pi r^2 \\ V = Bh \end{cases} \Rightarrow \ h = \frac{128}{r^2}$$

$$Omkretsen = o = 2\pi r$$

$$Mantelytan = M = oh = 2\pi r \frac{128}{r^2} = \frac{256\pi}{r}$$

$$Total\ area = A = 2B + M = 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$$

$$\begin{cases} \frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2} \\ \frac{dA}{dr} = 0 \end{cases} \Rightarrow \ r = \sqrt[3]{64} = 4 \ (\text{cm})$$

Teckenstude av $\frac{dA}{dr}$ visar att $r = 4$ ger minimal area $A = 2 \cdot 16\pi + 64\pi = 96\pi \ (\text{cm}^2)$

(3 p)