Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen för kursen VT2016

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2016-03-21, kl. 14:00–19:00			

1.

a) Lös differentialekvationen

$$y' = y^2$$

Lösningstips:

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras enligt $\frac{dy}{y^2} = dx$ för $y \neq 0$ (notera att $y = 0$ studeras för sig) och båda leden integreras. Man får den allmänna lösningen $y = \frac{1}{C-x}$ med $x \neq C$ eller $y = 0$

b) Lös differentialekvationen

$$y' + xy = x$$

Lösningstips:

Ekvationen kan också lösas genom variabelseparation eller genom att båda leden multipliceras med den integrerande faktor $e^{\frac{x^2}{2}}$. Man får i båda fallen den allmänna lösningen $y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

c) Visa med lämplig ansats att ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 0$ får en karaktäristisk ekvation $r^2 - 4r + 5 = 0$ och att den allmänna lösningen blir $y = e^{2x}(A\sin x + B\cos x)$.

Lösningstips:

Insättning av $y = Ce^{rx}$ med tillhörande derivator ger efter faktorisering ekvationen $r^2 - 4r + 5 = 0$ med lösningarna $r = 2 \pm i$. Därmed gäller att $y = C_1 e^{(2+i)x} + C_2 e^{(2-i)x}$ som efter omskrivning med bl.a. Eulers formel ger $y = e^{2x}\big((C_1 + C_2)\cos x + i(C_1 - C_2)\sin x\big)$ som förenklas till $y = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$

(3 p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 2y' = 15e^{3x} + 4x$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y'(0) = 8$ och $y(0) = 2$. (3 p)

Lösningstips:

Den homogena ekvationen $y'' + 2y' = 0$ löses och man får $y_h = A + Be^{-2x}$ vilka inte återfinns i högerledet. Därmed fungerar ansatsen $y_p' = Ce^{3x} + Dx + E$ med tillhörande derivata y_p'' och insättning i ekvationen ger $y_p' = 3e^{3x} + 2x - 1$. Därmed duger partikulärlösningen $y_p = e^{3x} + x^2 - x$ (utan konstant).

Den allmänna lösningen blir därmed $y = A + Be^{-2x} + e^{3x} + x^2 - x$ och efter derivering $y' = -2Be^{-2x} + 3e^{3x} + 2x - 1$

Med hänsyn till villkoren får man $\begin{cases} -2B + 3 - 1 = 8 \\ A + B + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -3 \\ A = 4 \end{cases}$

$y = 4 - 3e^{-2x} + e^{3x} + x^2 - x$

3. Låt $f_X(x)$ vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{8e^{4x}}{5} & x < 0 \\ \dfrac{24e^{-8x}}{5} & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Vilka två egenskaper kännetecknar en täthetsfunktion?

Svar: $f_X(x) \geq 0 \ och \ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

b) Bestäm fördelningsfunktionen.

Svar: $F_X(x) = \begin{cases} \frac{2e^{4x}}{5} & x < 0 \\ 1 - \frac{3e^{-8x}}{5} & x \geq 0 \end{cases}$

c) Beräkna medianen. (3 p)

Svar: $x_{0.5} = \frac{\ln 6 - \ln 5}{8}$

4. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då ytan mellan $y = 8x - x^2$, $y = 16$ och $x = 8$ roterar runt $x = 4$. (3 p)

Lösningstips:

Exempelvis skalmetoden ger

$$V = \int_4^8 2\pi(x-4)\big(16-(8x-x^2)\big)dx = \cdots = 128\pi \text{ v. e.}$$

5.

a) Anpassa a så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna därefter gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{a - e^{2x} + \sin 2x - \cos 4x}{x^2}$$

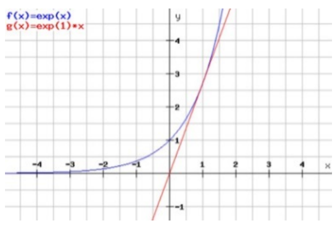
Lösningstips:

Maclaurinutveckling av täljaren (minst t.o.m. grad 2) visar att $a = 2$ krävs för att täljare och nämnare skall få samma grad så att gränsvärde existerar då $x \to 0$. Gränsvärdet blir då 6.

b) Skissa kurvor till $y = e^x$ och tillhörande Taylor-polynom av grad 1 i en omgivning till $x = 1$.

Lösningstips:

Taylor-utveckling ger Taylor-polynom av grad 1: $T_1(x) = ex$



(3 p)

6.

a) På vilka två sätt utvidgas integralbegreppet vid införandet av generaliserade integraler?

Lösningstips:

Se definition 6.6 och 6.7 i läroboken

b) Beräkna

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{-x}+e^x}dx$$

Lösningstips:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\arctan t]_1^b = \frac{\pi}{4}$$

(3 p)

c) Beräkna

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{a+5} \left(2 - \frac{\sin x}{x}\right) dx$$

Lösningstips:

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{a+5} \left(2 - \frac{\sin x}{x}\right) dx = \left| \begin{matrix} \text{Medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler med} \\ a < \xi < a+5 \end{matrix} \right| = f(\xi)\big((a+5) - a\big)$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{\sin x}{x} \to 0 \text{ då } x \to \infty \\ \text{vilket medför att} \\ f(\xi) \to 2 \text{ då } x \to \infty \end{matrix} \right| = 2 \cdot 5 = 10$$

7.

a) Låt $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Beräkna marginalökningen $S'(x)$ med hjälp av bl.a. derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler och stöd beräkningen med en tydlig skiss.

Lösningstips:

Se beviset för Analysens huvudsats

b) Beräkna

$$\frac{d}{dx} \int_{\ln 2x}^{\ln 3x} e^t\,dt$$

Lösningstips:

Analysens huvudsats eller Krzysztofs formel ger svaret 1

(3 p)