

# Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

---

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsninganteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsninganteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN  
Linköpings Universitet  
Tel. 0705-19 99 92  
petho@itn.liu.se

## Tentamen inom Envariabelanalys II

*Ordinarie tentamen för kursen VT2016*

Examination: TEN 1 inom kurs TNIU23

Max: 21 p                      betyg 5:  $\geq 16$  p                      betyg 4:  $\geq 12$  p                      betyg 3:  $\geq 8$  p

Bonus: 0-2 p grundad på KTR1

Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.

Hjälpmedel: Skrivdon, passare, kurvmall och linjal

Skrivtid: 2016-03-21, kl. 14:00–19:00

---

1.

a) Lös differentialekvationen

$$y' = y^2$$

*Lösningstips:*

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras enligt  $\frac{dy}{y^2} = dx$  för  $y \neq 0$  (notera att  $y = 0$  studeras för sig) och båda leden integreras. Man får den allmänna lösningen

$$y = \frac{1}{c-x} \text{ med } x \neq c \text{ eller } y = 0$$

b) Lös differentialekvationen

$$y' + xy = x$$

*Lösningstips:*

Ekvationen kan också lösas genom variabelseparation eller genom att båda leden multipliceras med den integrerande faktor  $e^{\frac{x^2}{2}}$ . Man får i båda fallen den allmänna lösningen  $y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ .

c) Visa med lämplig ansats att ekvationen  $y'' - 4y' + 5y = 0$  får en karakteristisk ekvation  $r^2 - 4r + 5 = 0$  och att den allmänna lösningen blir  $y = e^{2x}(A \sin x + B \cos x)$ .

*Lösningstips:*

Insättning av  $y = Ce^{rx}$  med tillhörande derivator ger efter faktorisering ekvationen  $r^2 - 4r + 5 = 0$  med lösningarna  $r = 2 \pm i$ . Därmed gäller att  $y = C_1 e^{(2+i)x} + C_2 e^{(2-i)x}$  som efter omskrivning med bl.a. Eulers formel ger  $y = e^{2x}((C_1 + C_2) \cos x + i(C_1 - C_2) \sin x)$  som förenklas till  $y = e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$

(3 p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 2y' = 15e^{3x} + 4x$$

som uppfyller begynnelsevillkoren  $y'(0) = 8$  och  $y(0) = 2$ .

(3 p)

*Lösningstips:*

Den homogena ekvationen  $y'' + 2y' = 0$  löses och man får  $y_h = A + Be^{-2x}$  vilka inte återfinns i högerledet. Därmed fungerar ansatsen  $y'_p = Ce^{3x} + Dx + E$  med tillhörande derivata  $y''_p$  och insättning i ekvationen ger  $y'_p = 3e^{3x} + 2x - 1$ . Därmed duger partikulärlösningen  $y_p = e^{3x} + x^2 - x$  (utan konstant).

Den allmänna lösningen blir därmed  $y = A + Be^{-2x} + e^{3x} + x^2 - x$  och efter derivering  $y' = -2Be^{-2x} + 3e^{3x} + 2x - 1$

Med hänsyn till villkoren får man  $\begin{cases} -2B + 3 - 1 = 8 \\ A + B + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -3 \\ A = 4 \end{cases}$

$$y = 4 - 3e^{-2x} + e^{3x} + x^2 - x$$

3. Låt  $f_X(x)$  vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8e^{4x}}{5} & x < 0 \\ \frac{24e^{-8x}}{5} & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Vilka två egenskaper kännetecknar en täthetsfunktion?

*Svar:*  $f_X(x) \geq 0$  och  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

b) Bestäm fördelningsfunktionen.

*Svar:*  $F_X(x) = \begin{cases} \frac{2e^{4x}}{5} & x < 0 \\ 1 - \frac{3e^{-8x}}{5} & x \geq 0 \end{cases}$

c) Beräkna medianen.

(3 p)

*Svar:*  $x_{0.5} = \frac{\ln 6 - \ln 5}{8}$

4. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då ytan mellan  $y = 8x - x^2$ ,  $y = 16$  och  $x = 8$  roterar runt  $x = 4$ . (3 p)

*Lösningstips:*

Exempelvis skalmetoden ger

$$V = \int_4^8 2\pi(x - 4)(16 - (8x - x^2))dx = \dots = 128\pi \text{ v. e.}$$

5.

- a) Anpassa  $a$  så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna därefter gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - e^{2x} + \sin 2x - \cos 4x}{x^2}$$

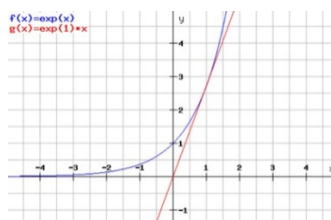
*Lösningstips:*

Maclaurinutveckling av täljaren (minst t.o.m. grad 2) visar att  $a = 2$  krävs för att täljare och nämnare skall få samma grad så att gränsvärde existerar då  $x \rightarrow 0$ . Gränsvärdet blir då 6.

- b) Skissa kurvor till  $y = e^x$  och tillhörande Taylor-polynom av grad 1 i en omgivning till  $x = 1$ .

*Lösningstips:*

Taylor-utveckling ger Taylor-polynom av grad 1:  $T_1(x) = ex$



(3 p)

6.

- a) På vilka två sätt utvidgas integralbegreppet vid införandet av generaliserade integraler?

*Lösningstips:*

Se definition 6.6 och 6.7 i läroboken

- b) Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{-x} + e^x} dx$$

Lösningstips:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{1 + t^2} dt$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan t]_1^b = \frac{\pi}{4}$$

(3 p)

c) Beräkna

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{a+5} \left( 2 - \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

Lösningstips:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{a+5} \left( 2 - \frac{\sin x}{x} \right) dx = \left| \begin{array}{l} \text{Medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler med} \\ a < \xi < a + 5 \end{array} \right| = f(\xi)((a + 5) - a)$$
$$= \left| \begin{array}{l} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \\ \text{vilket medför att} \\ f(\xi) \rightarrow 2 \text{ då } x \rightarrow \infty \end{array} \right| = 2 \cdot 5 = 10$$

7.

a) Låt  $S(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Beräkna marginalökningen  $S'(x)$  med hjälp av bl.a. derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler och stöd beräkningen med en tydlig skiss.

Lösningstips:

Se beviset för Analysens huvudsats

b) Beräkna

$$\frac{d}{dx} \int_{\ln 2x}^{\ln 3x} e^x dt$$

Lösningstips:

Analysens huvudsats eller Krzysztofs formel ger svaret 1

(3 p)