Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 1 för kursen VT2016

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2016-06-09, kl. 14:00–19:00			

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - y = 9e^{2x} - 3x^2$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y'(0) = 6$ och $y(0) = 15$.

Lösningstips:

Den homogena ekvationen $y'' - y = 0$ löses och man får $y_h = Ae^x + Be^{-x}$.

Därmed fungerar ansatsen $y_p = Ce^{2x} + Dx^2 + Ex + F$ med tillhörande andraderivata $y_p'' = 4Ce^{2x} + 2D$ och insättning av y_p och y_p'' i ekvationen ger partikulärlösningen $y_p = 3e^{2x} + 3x^2 + 6$.

Den allmänna lösningen blir därmed $y = Ae^x + Be^{-x} + 3e^{2x} + 3x^2 + 6$ med derivatan $y' = Ae^x - Be^{-x} + 6e^{2x} + 6x$ o.s.v.

Med hänsyn till villkoren får man $\begin{cases} A + B + 3 + 6 = 15 \\ A - B + 6 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 3 \end{cases}$ så att den sökta lösningen blir

$$y = 3e^x + 3e^{-x} + 3e^{2x} + 3x^2 + 6$$

(3 p)

2.

a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

Lösning:

Elementära Maclaurinutvecklingar ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^5)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\mathcal{O}(x^2)\right) = \frac{1}{3}$$

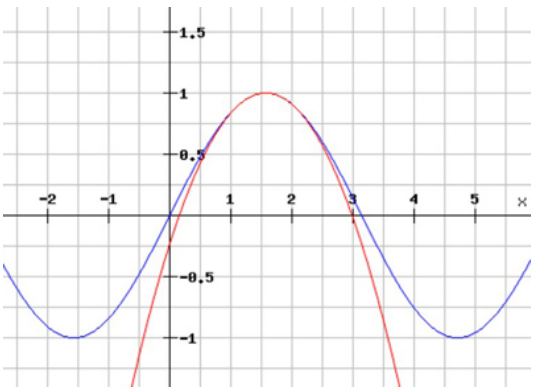
b) Skissa kurvor till $y = \sin x$ och tillhörande Taylor-polynom av grad 2 i en omgivning till $x = \frac{\pi}{2}$.

Lösningstips:

Taylors formel ger Taylor-polynom av grad 2:

$$T_2(x) = 1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}$$

Kurvorna skissa och man får:



(3 p)

3. Låt $f_X(x)$ vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \dfrac{1}{5} & , \ 0 \leq x < 5 \\ 0 & , \ x \geq 5 \end{cases}$$

a) Visa att väntevärdet och medianen sammanfaller för denna funktion.

Lösningstips:

Medianen $x_{0,5}$ fås genom anpassning av b enligt.

$$\int_0^b \frac{1}{5}\,dx = \left[\frac{x}{5}\right]_0^b = \frac{b}{5} \overbrace{= 0{,}5}^{\text{krav för median}} \iff b = 2{,}5$$

Väntevärdet μ fås genom $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_0^5 \frac{x}{5}\,dx = \left[\frac{x^2}{10}\right]_0^5 = \frac{25}{10} = 2{,}5$

Därmed gäller att medianen $= x_{0,5} = 2{,}5 = \mu =$ vänteärdet

b) Vilka två egenskaper kännetecknar en fördelningsfunktion?

Svar:

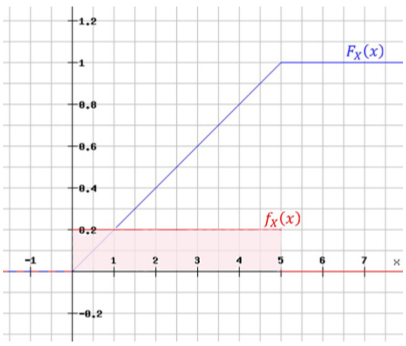
En fördelningsfunktion $F_X(x)$ är just den primitiva funktionen till $f_X(x)$ sådan att

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

Genom att anpassa konstanten C fås just den primitiva funktion $F_X(x)$ till täthetsfunktionen $f_X(x)$ som stämmer enligt de två kraven ovan och dessutom är *växande* från funktionsvärdet 0 till funktionsvärdet 1.

c) Skissa täthetsfunktionen och tillhörande fördelningsfunktion i samma koordinatsystem.

Svar:



(3 p)

4. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då det begränsade området mellan $y = \sqrt{x}$ och $y = x$ roterar…

a) …ett varv runt x –axeln.

b) …ett varv runt y –axeln.

Lösningstips:

Området identifieras och skärningspunkterna är origo samt (1, 1).

a) Exempelvis skivmetoden ger runt x-axeln

$$V = V_{yttre} - V_{inre} = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \int_0^1 \pi x^2 dx = \cdots = \frac{\pi}{6} \quad \text{v. e.}$$

b) Exempelvis skalmetoden ger runt y-axeln

$$V = V_{yttre} - V_{inre} = \int_0^1 2\pi x\left(\sqrt{x} - x\right)dx = \cdots = \frac{2\pi}{15} \quad \text{v. e.}$$

(3 p)

5.

a) Lös differentialekvationen

$$y' = \sqrt{y}$$

Lösningstips:

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras enligt:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

Båda leden integreras och man får den allmänna lösningen

$$2\sqrt{y} = x + C \quad , \quad x \geq -C$$

Kravet $x \geq -C$ följer eftersom att vänsterledet ej kan anta negativa värden. Man löser sedan ut y och får:

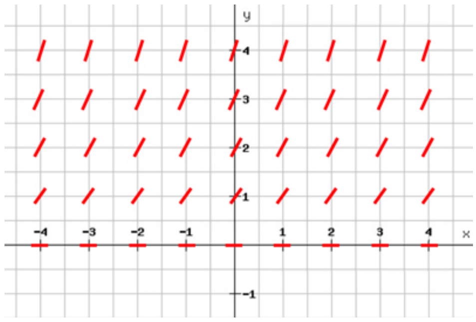
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{(x + C)^2}{4} \quad , \quad x \geq -C$$

b) Skissa riktningsfält i närheten av origo till differentialekvationen

$$y' = \sqrt{y}$$

Svar:

Som synes påverkas derivatan y' enbart av $\sqrt{y}$ och inte av x. En värdetabell med utvalda y-värden (ej negativa) mellan exempelvis 0 och 4 ger derivator y' mellan 0 och 2 och riktningsfältet för följande utseende:



Intressant: Notera att riktningsfältet ovan är en samlad bild av alla lösningar

$$y = \frac{(x + C)^2}{4} \quad , \quad x \geq -C$$

som man bestämt i föregående uppgift a) Därmed kan fältet också skissas med hjälp av de lösningskurvorna (med olika C-värden mellan exempelvis -2 och 2).

(3 p)

6.

a) Formulera medelvärdessatsen för integraler

Lösningstips:

Se sats 6.5 i läroboken. Satsen anger (mycket förenklat) att under vissa förutsättningar (slutet intervall och kontinuerlig funktion på aktuellt intervall) gäller att en bestämd integrals värde också kan fås genom produkten av ”intervallets bredd” och ”lämpligt valt funktionsvärde” (lagom stort funktionsvärde) vid ett eller flera tänkbara x-värden (vanligen betecknade ξ) inom aktuellt intervall.

b) Visa att

$$\frac{2}{15} < \int_0^2 \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx < 2$$

Lösningstips:

Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2+x+1}$ är strängt avtagande inom det aktuella intervallet vilket gör att funktionens största värde på aktuellt intervall är $f_{max} = f(0) = 1$ och funktionens minsta värde är $f_{min} = f(2) = \frac{1}{15}$.

Därmed gäller (med integrationsgränserna $a = 0$ och $b = 2$) att

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx < f_{max} \cdot (b - a) = 1 \cdot 2 = 2$$

och

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx > f_{min} \cdot (b - a) = \frac{1}{15} \cdot 2 = \frac{2}{15}$$

Därmed gäller dubbelolikheten ovan.

(3 p)

7. Ange den funktion som uppfyller integralekvationen

$$y(x) = x^2 + \int_0^x y(t)dt$$

Tips: Derivera ledvis och lös differentialekvationen som uppstår.

Lösningstips:

Ledvis derivering med avseende på x ger:

$$y'(x) = 2x + \frac{d}{dx}\int_0^x y(t)dt$$

Analysens huvudsats ger nu en första ordningens differentialekvation

$$y'(x) - y(x) = 2x$$

som kan lösas med hjälp av integrerande faktor e^{-x} enligt:

$$y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 2xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y(x)e^{-x}\right) = 2xe^{-x}$$

Båda leden integreras (partiell integration i högerledet) och man får:

$$\Leftrightarrow \quad y(x)e^{-x} = \int 2xe^{-x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)e^{-x} = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)e^{-x} = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{x} - 2x - 2$$

Den ursprungliga ekvationen har ett begynnelsevillkor som gör att C kan bestämmas. Villkoret fås genom att man sätter in $x = 0$ i den ursprungliga ekvationen och nollställer integralen i högerledet så att ett villkor framträder:

$$y(0) = 0^2 + \int_0^0 y(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad y(0) = 0$$

Därmed är den enda lösningen av ekvationen

$$y(x) = 2e^{x} - 2x - 2$$

(3 p)