Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2016

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2016-08-27, kl. 08:00–13:00			

---

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 3y = (4x - 2)e^{-3x}$$

Lösningstips:

Den homogena ekvationen $y'' + 4y' + 3y = 0$ löses och man får

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$$

Ansatsen $y_p = ze^{-3x}$ med z som en funktion $z(x)$ ger efter derivering och förenkling derivatorna

$$y_p' = (z' - 3z)e^{-3x}$$

$$y_p'' = (z'' - 6z' + 9z)e^{-3x}$$

Insättning i ekvationen visar att

$$z'' - 2z' = 4x - 2$$

Därmed bör z vara ett andragradspolynom så att z' samtidigt kan ge förstagradstermen som återfinns i högerledet.

$z = Ax^2 + Bx$ räcker då C redan återfinns i den homogena ekvationens lösningar ovan.

Insättning av $z' = 2Ax + B$ och $z'' = 2A$:

$$z'' - 2z' = 2A - 4Ax - 2B = 4x - 2$$

Därmed gäller att $A = -1$ och $B = 0$ så att $z = -x^2$ och

$$y_p = -x^2 e^{-3x}$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} - x^2 e^{-3x}$$

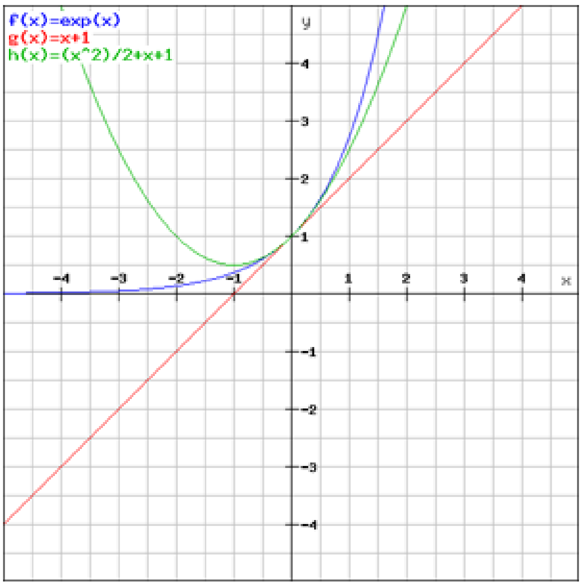
(3 p)

2.

a) Skissa i ett *gemensamt* koordinatsystem kurvan till $f(x) = e^x$ och kurvor till motsvarande Maclaurin-polynom av grad 1 och grad 2 i en omgivning till $x = 0$.

Lösningstips:

Kurvor tillhörande Maclaurin-polynomen $p_1(x) = 1 + x$ och $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ samt funktionen $f(x) = e^x$ skissas och man ser att $p_2(x)$ bättre approximerar $f(x)$ än vad $p_1(x)$ gör, i en omgivning till $x = 0$.



b) Bestäm gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(e^{3x}-1)}{\sin x^3}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)(e^{3x}-1)}{\sin x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+O(x^4)\right)\right)\left(1+3x+\frac{(3x)^2}{2}+O(x^3)-1\right)}{\left(x^3+O(x^9)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x^3+O(x^4)}{x^3+O(x^9)} = \lim_{x\to 0} \frac{6+O(x)}{1+O(x^6)} = 6$$

Svar: 6

(3 p)

3. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området mellan $y=\sqrt{x}$, $y=0$ och $x=9$ roterar ett varv runt $x=9$.

Lösningstips:

Exempelvis skalmetoden ger $V=\int_0^9 2\pi(9-x)\left(\sqrt{x}\right)dx = \cdots = \frac{648\pi}{5}$ v. e.

(3 p)

4.

Låt $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{1+x^2} & \text{då } -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

a) Anpassa konstanten a så att $f(x)$ blir en täthetsfunktion.

Lösningstips:

Definitionen av täthetsfunktion ger i denna uppgift integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{a}{1+x^2}dx = [a\arctan x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2a\pi}{3} = |\text{krav}| = 1$$

som visar att $a=\frac{3}{2\pi}$

Svar: $a=\frac{3}{2\pi}$

b) Bestäm fördelningsfunktionen.

Lösningstips:

För fördelningsfunktioner $F(x)$ gäller enligt sats att de är växande samt att

$$F(x) \to 1 \text{ då } x \to \infty$$

och

$$F(x) \to 0 \text{ då } x \to -\infty$$

I detta fall gäller att då $x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ är

$$F(x) = \frac{3}{2\pi}\arctan x + C$$

C anpassas så att

$$F\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2\pi}\arctan\sqrt{3} + C = \frac{1}{2} + C = |\text{krav}| = 1$$

$$F\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2\pi}\arctan\left(-\sqrt{3}\right) + C = -\frac{1}{2} + C = |\text{krav}| = 0$$

Därmed inses att $C = \frac{1}{2}$

Svar: $F(x) = \frac{3}{2\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$

(3 p)

5.

Lös differentialekvationen

$$\frac{y'}{\tan x} - y = \frac{1}{\sin x}$$

Lösningstips:

Ekvationen skriven på normalform

$$y' - \tan x \cdot y = \tan x \frac{1}{\sin x} \quad \Leftrightarrow \quad y' - \tan x \cdot y = \frac{1}{\cos x}$$

kan lösas genom att båda leden multipliceras med en integrerande faktor $\cos x$ som fås genom

$$e^{\int(-\tan x)dx} = e^{\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx} = e^{\ln|\cos x|} = |\cos x|$$

Ekvationen multiplicerad med den integrerande faktorn $\cos x$:

$$y' \cos x - y \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(y\cos x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y\cos x = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x + C}{\cos x}$$

(3 p)

6.

a) Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

Lösning:

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} \text{Partiell} \\ \text{intergration} \end{matrix} \right| = \lim_{a \to 0^+} [x \ln x - x]_a^1$$

$$= 1 \ln 1 - 1 - \lim_{a \to 0^+} \left(\underbrace{a \ln a}_{sgv} - a \right) = 0 - 1 - 0 = -1$$

b) Beräkna det värde ξ som med medelvärdessatsen för integraler ger det korrekta svaret 1 för denna integral

$$\int_1^e \ln x \, dx$$

Lösning:

$$\int_1^e \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{matrix} \right| = f(\xi)(b - a)$$

$$= \ln \xi \cdot (e - 1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln \xi = \frac{1}{e - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \xi = e^{1/(e-1)} \approx 1{,}8$$

(3 p)

7.

a) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på I samt att x och $a \in I$.

Bevisa utifrån bl.a. medelvärdessatsen för integraler att

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x)$$

Lösningstips:

Beviset av Analysens huvudsats finns under Sats 6.7 på sid 286 i läroboken samt i föreläsningsanteckningarna.

b) Förklara med en skiss och egna ord vad uttrycket ovan i praktiken berättar.

Lösningstips:

Se kommentarer om Analysens Huvudsats från föreläsningen. Satsen säger att marginalökningen av integralen $\int_a^x f(t) \, dt$ med avseende på den högra integrationsgränsen x är lika stor som funktionsvärdet $f(x)$.

(3 p)