Uppdaterade uppgifter 1-10 till Krzysztofs häfte

Dessa uppgifter ersätter de tio uppgifterna som fanns i slutet av Krzysztofs häfte som tar upp teorin från föreläsning 8 inom kursen TNIU23.

1) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{x+1}} & \text{för } -1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

a) Vilka två egenskaper kännetecknar en täthetsfunktion?
b) Bestäm c så att $f_X(x)$ blir en täthetsfunktion.
c) Bestäm sannolikheten för $x > 0$, alltså sannolikheten att den stokastiska variabeln X, som beskrivs av denna täthetsfunktion, antar ett positivt värde.
d) Vilka egenskaper har en fördelningsfunktion?
e) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion $F_X(x)$.

Låt nu istället $f_X(x)$ gälla på följande intervall:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{x+1}} & \text{för } 3 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

f) Bestäm på nytt c så att $f_X(x)$ blir en täthetsfunktion.
g) Bestäm sannolikheten för $x > 8$, alltså sannolikheten att den stokastiska variabeln X, som beskrivs av denna täthetsfunktion, antar ett värde större än 8.
h) Bestäm på nytt den tillhörande fördelningsfunktionen $F_X(x)$.

2) Skissa kurvor för täthetsfunktionen skapad i 1) b) och den tillhörande fördelningsfunktionen i 1) e).

3) Låt X vara en stokastisk variabel för radioaktivt sönderfall enligt funktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$$

med sönderfallskonstanten λ. Vi minns från kärnfysiken att halveringstiden $T = 1/\lambda$.

a) Visa att $f_X(x)$ faktiskt är en täthetsfunktion.
b) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion $F_X(x)$.

4) Låt

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{för } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Beräkna nedre kvartilen $x_{0.25}$ med hjälp av fördelningsfunktionen ovan.

Den tillhörande täthetsfunktion är

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{för } x \geq 1 \end{cases}$$

b) Beräkna åter den nedre kvartilen $x_{0.25}$ men med hjälp av en integral med sökt övre integrationsgräns.
c) Beräkna medianen $x_{0.5}$ på två olika sätt.
d) Beräkna alfakvantilen x_α.
e) Visa med hjälp av svaret i d) att alfakvantilen $x_\alpha \to \infty$ då sannolikheten $\alpha \to 1^-$ och fundera över innebörden av detta.

5) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{5} e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ \dfrac{3}{5} e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Hur stor är chansen att ett slumpmässigt valt X är negativt?
b) Beräkna nedre kvartilen.
c) Beräkna medianen med hjälp av en integral.
d) Bestäm fördelningsfunktionen.
e) Beräkna istället medianen med hjälp av fördelningsfunktionen.

6) Låt $F_X(x)$ vara en fördelningsfunktion enligt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{3} & \text{för } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{för } x > 2 \end{cases}$$

a) Hur ser man att $F_X(x)$ saknar tillhörande täthetsfunktion?
b) Vilket krav på kontinuitet finns för frödelningsfunktioner $F_X(x)$?

7) Den stokastiska variabeln X anger hur lång tid det normalt tar (i minuter efter att en affär öppnas) innan den första kunden dyker upp. Variabeln beskrivs av fördelningsfunktionen:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0 \\ 1 - e^{-0.5x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Beräkna på två sätt hur stor är chansen att den första kunden dyker upp inom tidsintervallet 2-4 min efter att affären öppnas.
b) Beräkna hur stor är chansen att den första kunden dyker upp efter exakt 2 min.
c) Beräkna hur stor är chansen att den första kunden dyker upp senare än 4 min.

8) Den stokastiska variabeln X anger (i mil) ”avståndet mellan en jagande havsörn och örnens bo”. Avståndet beskrivs av täthetsfunktionen:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0 \\ 8xe^{-4x^2} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Beräkna median-avståndet.
b) Beräkna den radie (avstånd till örnboet) som örnen finns inom med 99 % säkerhet.

9) Den stokastiska variabeln X beskrivs av täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{för } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

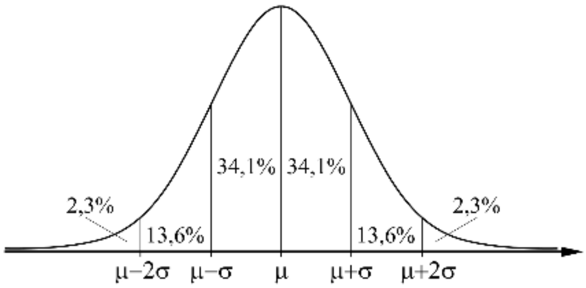
a) Beräkna medianen.
b) Beräkna väntevärdet $\mu = E(X)$.
c) Beräkna variansen $V(X)$.
d) Beräkna standardavvikelsen $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

10) Vid normalfördelning gäller exempelvis att

”Sannolikheten att ett slumpmässigt valt X finns inom en standardavvikelse från väntevärdet” $= P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68\ \%$

och ”sannolikheten att ett slumpmässigt valt X finns inom två standardavvikelser från väntevärdet” $= P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95\ \%$.

Normalfördelningskurvan beskriver fördelningen:



Låt nu den stokastiska variabeln X beskrivas av täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{för } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

a) Beräkna väntevärdet $\mu = E(X)$.

b) Beräkna standardavvikelsen $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Fördelningen i denna uppgift är dock ”triangulär” till skillnad från den klockformiga normalfördelningskurvan i figuren ovan och man får andra sannolikheter inom de olika intervallen runt väntevärdet μ.

c) Beräkna sannolikheten $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ och jämför med motsvarande sannolikhet ovan.

d) Beräkna sannolikheten $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ och jämför med motsvarande sannolikhet ovan.

Facit

1)

a) Se Definition 1 på sid 1 i K:z häfte

b) $c = \frac{1}{4}$

c) 50 %

d) Se Sats 7 på sid 6 i K:z häfte

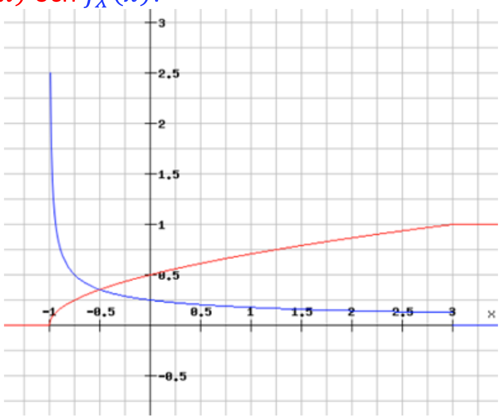
e) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x+1} & \text{för } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{för } x > 3 \end{cases}$

f) $c = \frac{1}{2}$

g) 0 %

h) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 3 \\ \sqrt{x+1} - 2 & \text{för } 3 \leq x \leq 8 \\ 1 & \text{för } x > 8 \end{cases}$

2) $F_X(x)$ och $f_X(x)$:



3)

a) Man visar att funktionen stämmer enligt de två egenskaperna i Definition 1 på sid 1 i K:z häfte

b) $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för övriga värden } x \end{cases}$

4)

a) $x_{0.25} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$

b) $x_{0.25} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$

c) $x_{0.5} = \sqrt{2}$

d) $x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

e) $\lim_{\alpha \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = \left|\frac{1}{0^+}\right| = \infty$

Detta visar att det för denna stokastiska variabel X krävs ett oändligt stort x-värde x_α för att en slumpmässigt vald X med säkerhet skall vara mindre än x_α. Alltså $x_\alpha \to \infty$ om $\alpha = P(X < x_\alpha) \to 1^-$.

5)

a) $40\ \%$

b) $x_{0.25} = \frac{\ln 5 - \ln 8}{3} \approx -0.16$

c) $x_{0.5} = \ln 6 - \ln 5 \approx 0.18$

d) $F_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ 1 - \frac{3}{5}e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$

e) $1 - \frac{3}{5}e^{-x} = \frac{1}{2}$ ger också $x_{0.5} = \ln 6 - \ln 5 \approx 0.18$

6)

a) Då funktionen inte är kontinuerlig i $x = 1$ är den knappast deriverabar och saknar därmed tillhörande täthetsfunktion.

b) En fördelningsfunktion måste åtminstone vara högerkontinuerlig i alla punkter, vilket denna funktion är.

7)

a) $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 23\ \%$

b) $0\ \%$ (integral utan area)

c) $\frac{1}{e^2} \approx 14\ \%$

8)

a) $x_{0.5} = \sqrt{\frac{\ln 2}{4}} \approx 4.2\ \text{km}$

b) $x_{0.99} = \sqrt{\frac{\ln 100}{4}} \approx 10.7\ \text{km}$

9)

a) $x_{0.5} = \sqrt{2} \approx 1.41$

b) $\mu = E(X) = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$

c) $\sigma^2 = V(X) = \frac{2}{9}$

d) $\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

10)

a) $\mu = E(X) = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$

b) $\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\sqrt{18}} \approx 0{,}24$

c) Integral mellan gränserna $\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}$ och $\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}$ ger sannolikheten $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{18}}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right)^2 = \cdots = \frac{4\sqrt{2}}{9} \approx 63\ \%$ (jämfört med ca 68 % vid normalfördelning)

d) Integral mellan gränserna $\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{18}}$ och 1 (ty $\mu + 2\sigma$ ligger utanför $0 \leq x \leq 1$) ger sannolikheten $1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{18}}\right)^2 = \cdots = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{9} \approx 96\ \%$ (jämfört med ca 95 % vid normalfördelning)