Ledtrådar till lektionsuppgifter

Allmänna råd vid lösning av lektionsuppgifter:

- Försök inledningsvis att lösa uppgiften på egen hand, genom att omsätta innehållet i den tillhörande föreläsningen samt innehållet i läroboken.
- I andra hand försök att lösa uppgiften med hjälp av inledande ledtrådar nedan.
- I tredje hand försök att lösa uppgiften i dialog med en kamrat.
- I fjärde hand försök att lösa uppgiften med annan hjälp, t.ex. läraren eller andra studenter.

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 1:

Ö6.7 a-d) Substitution av "inre funktionen"

Ö6.8 a-d) Derivatan av nämnaren i täljaren…

Ö6.9 a-d) Substitution av "inre funktionen"

L5.9

a) Substitution av "inre funktionen"
b) Förlängning med e^x och sedan substitution av e^x
c) Substitution av $\ln x$
d) Substitution av $x = t^2$

Ö6.11

a) Substitution av $\arcsin x$
b) Standardprimitiv ”k”
c) Substitution av e^x
d) Partiell integration
e) Partiell integration!
f) Substitution av "inre funktionen"
g) Partiell integration!
h) Substitution $t = x^2$ och sedan partiell integration

L5.11

a) Derivatan av nämnaren i täljaren…
b) Substitution av "inre funktionen" följt av partiell integration
c) Substitution av hela nämnare
d) Substitution av $\ln x$
e) Substitution $x = t^2$ följt av partiell integration
f) Uppdelning i separata integraler, den ena med substitutionen $x = t^2$, den andra genom substitution av ”inre funktionen”

Ö6.18

a) Partialbråksuppdelning
b) Polynomdivision
c) Partialbråksuppdelning

Ö6.19

a) Uppdelning i två integraler, den ena med derivatan av nämnaren i täljaren
b) Uppdelning i två integraler, den ena med derivatan av nämnaren i täljaren, den andra med nämnare som passar arctangens' derivata
c) Partialbråksuppdelning

Ö6.20

a) Tre faktorer i nämnaren och sedan partialbråksuppdelning
b) Fyra faktorer i nämnaren och sedan partialbråksuppdelning

L5.13-5.15

a-c) Ansatser enligt svaret på teorifråga 8

L5.16

a) Polynomdivision
b) Partialbråksuppdelning
c) Partialbråksuppdelning
d) Partialbråksuppdelning

L5.26

a) Substitution av nämnaren
b) Substitution av $4x$
c) Utbrytning av 4 och substitution av $\frac{3x}{2}$
d) Substitution av nämnaren
e) Substitution av ”inre funktionen”
f) Substitution av $x + 2$
g) Partiell integration
h) Partiell integration med en etta
i) Omskrivning med logaritmlag
j) Substitution av ”inre funktionen”
k) Substitution $x = t^2$ följt av upprepad partiell integration
l) Substitution av ”inre funktionen”

L5.29 Partialbråksuppdelning och anpassning av konstanten

L5.33

a) Bestäm $\int e^x \sin x\, dx$ och $\int e^x \cos x\, dx$ genom partiell integration med ”deja vu”.

Integrera sedan enligt $\int xe^x \sin x\, dx = \int \overbrace{(e^x \sin x)}^{\Uparrow} \underbrace{x}_{\Downarrow}\, dx = \cdots$

b) Bestäm $\int e^x \sin x\, dx$ och $\int e^x \cos x\, dx$ genom partiell integration med ”deja vu”.

Integrera sedan enligt $\int xe^x \cos x\, dx = \int \overbrace{(e^x \cos x)}^{\Uparrow} \underbrace{x}_{\Downarrow}\, dx = \cdots$

Ö6.21

a) Konjugatregeln för fyra nya faktorer och sedan partialbråksuppdelning
b) Partiell integration och partialbråksuppdelning av ny integral
c) Partiell integration och partialbråksuppdelning av ny integral

Ö6.29 Partialbråksuppdelning med fyra uttryck och anpassning av konstanten

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 2:

Ö6.22

a) Se svaret i teorifråga 10, svaret kan också skrivas som $\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C$
b) Definitionen av $\tan x$ samt ”derivatan av nämnaren i täljaren”
c) Se svaret i teorifråga 10
d) Variant I: ”Trigettan” och ”cosinus för dubbla vinkeln” två gånger
Variant II: Eulers formel och utveckling av produkten

Ö6.26

a) Se teorifråga 9
b) Se teorifråga 9
c) Studera svaren i a och b

Ö6.23

a) Se svaret i teorifråga 10
b) Se svaret i teorifråga 10

Ö6.24 Svår…

a) Additionssats i täljaren, sinus för dubbla vinkeln i både täljare och nämnare, förkorta, en av termerna ger till slut integral som löses genom partialbråksuppdelning.
b) Substitution enligt exempel 5.35

a) Substitution enligt exempel 5.35 och svaret blir $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-(1-\sqrt{2})}{\tan\frac{x}{2}-(1+\sqrt{2})}\right|+C$

Ö6.25

a) Substitutionen $\sqrt{x-2}=t$ samt polynomdivision
b) Substitutionen $\sqrt{x-1}=t$ samt polynomdivision
c) Substitutionen $\sqrt{x-1}=t$ samt polynomdivision

Ö6.27

a) Se exempel 5.36 i läroboken
b) Se exempel 5.36 i läroboken

L5.19

a) ”Trigettan” och substitution av $\cos x$
b) Substitution av hela nämnaren
c) ”Cosinus för dubbla vinkeln” två gånger

L5.24

b) Substitutionen $y=\sqrt{x-1}$ ger $x=1+y^2$, därefter polynomdivision
c) Substitutionen $x-2=2y$ ger kvadratiskt uttryck under roten, polynomdivision, separata integraler, substitution i den ena

L5.22 Substitution enligt texten och studera gärna Exempel 5.35

L5.23 Se exempel 5.35

L5.30

a) Partiell integration
b) Förläng med e^{-x} och sedan substitution av hela nämnaren
c) Partiell integration och partialbråksuppdelning av andra integralen
d) Partiell integration och partialbråksuppdelning av andra integralen efter förlängning med $4x$
e) Substitution av ”inre funktionen”
f) $\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$
g) Se teorifråga 10
h) Se teorifråga 10
i) Substitution enligt exempel 5.35

L5.31

a) Kvadratkomplettering i nämnaren och substitution av $x-1$

b) Substitution av hela täljaren
c) Substitution av hela uttrycket med en hel del omskrivning
d) Partiell integration
e) Kvadratkomplettera under rottecknet, utbrytning av 4, substitution
f) Förläng med x, substitution av rotuttrycket, partialbråksuppdelning

Ö6.28 Tips i texten, vid partiell integration får man ”deja vu” i högerledet efter smart hantering av rotfunktion (+1 och -1 i täljaren).

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 3:

Ö7.1 Skissa trappfunktionens graf och studera integralen

Ö7.2 a) och c) Skissa över- respektive undertrappa med fem lika långa delintervall och bestäm sedan över- och undersumman ur figuren.

d) Lös integralen

Ö7.4 Funktionen är strängt avtagande inom aktuellt intervall, vilket kan visas. Bestäm över- och undertrappa med enbart ett långt delinervall och jämför olikhetens gränser.

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 4:

Ö7.5 Instängning av ξ mellan x och $2x$ enligt Medelvärdessatsen för integraler (Sats 6.5) samt förenkling

Ö 7.6 Skissa figur med kurva till funktionen $f(x) = \arctan x$, instängning av ξ mellan n och $n+1$ enligt Medelvärdessatsen för integraler (Sats 6.5) samt förenkling

Ö 7.7 Två exempel på två olika ösningsmetoder:

I) Den korta vägen:

Direkt tillämning av Analysens huvudsats (Sats 6.7) – gärna med hjälp av ”Krzysztofs formel” från föreläsningen

Skissa figur med kurva till funktionen $f(t) = \frac{e^{-t^2}}{t}$. Markera integralen med högergränsen x samt en motsvarande integral med närliggande högergränsen $x+h$. Differensen mellan dessa integraler förs in som täljare i derivatans definition, förenkla i täljaren med hjälp av Räkneregel 6.2 (e) för integraler (Sats 6.2). Instängning av ξ mellan x och $x+h$ enligt Medelvärdessatsen för integraler (Sats 6.5) samt förenkling.

II) Den korta vägen:

Direkt insättning i huvudsatsens (Stas 6.7)

Ö 7.8	Exempel på två olika ösningsmetoder:
	I) Den korta vägen:
	Direkt tillämning av Analysens huvudsats (Sats 6.7) – gärna med hjälp av ”Krzysztofs formel” från föreläsningen
	II) Den långa men nyttiga vägen som bygger på beviset av Analysens huvudsats:
	Skissa figur med förenklad kurva till funktionen $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. Markera integralen med högergränsen x samt en motsvarande integral med närliggande högergränsen $x + h$. Differensen mellan dessa integraler förs in som täljare i derivatans definition, förenkla i täljaren med hjälp av Räkneregel 6.2 (e) för integraler (Sats 6.2). Instängning av ξ mellan x och $x + h$ enligt Medelvärdessatsen för integraler (Sats 6.5) samt förenkling.
Ö 7.10	Skissa tillhörande kurva och fundera över vad det i praktiken handlar om. Den sökta högergränsen finner man sedan ganska enkelt.
L 6.4	Samma metod som i Ö7.7 och Ö7.8, teckenfel fås lätt i (b) om men missar att integralerna har variabel vänstergräns.
L 6.7	Instängning av ξ mellan x och $2x$ enligt Medelvärdessatsen för integraler (Sats 6.5) samt förenkling.
Ö7.12	Alla uppgifter löses med hjälp av standardprimitiver och Insättningsformeln sats 6.8

Ö7.13

a) Partiell integration samt Insättningsformeln
b) Partiell integration (derivera $\ln x$ denna gång) samt Insättningsformeln
c) Partiell integration med en faktor 1 samt Insättningsformeln
d) ”Derivatan av nämnaren i täljaren” samt Insättningsformeln
e) Substitution av inre funktion samt Insättningsformeln
f) Substitution av inre funktion samt Insättningsformeln
g) Substitution av inre funktion samt Insättningsformeln
h) Substitution av inre funktion samt Insättningsformeln

Ö7.14

a) Partialbråksuppdela
b) Partiell integration, ny integral uppkommer och delas upp i två, den ena derivata till $\arctan x$ osv.
c) Substitution av inre funktion samt partiell integration
d) Partiell integration med faktor 1 osv.

e) Ersätt $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ och sedan substitution av $\tan x$ osv.
f) Substitution av inre funktion osv.

L6.8

a) Dela upp i två integraler – en med derivatan av nämnaren i täljaren och en vars nämnare kvadratkompletteras, insättningsformeln
b) Partiell integration, insättningsformeln
c) Partiell integration med derivering av logaritmen, insättningsformeln
d) Uppdelning i två integraler utifrån beloppet.

Ö7.15

a) Ledning i häftet
b) Substitution $x = t^3$ följt av partiell integration
c) Partiell integration med faktorn 1
d) Förläng med $\cos x$ och sedan derivatan av nämnaren i täljaren
e) Dela upp i två integraler pga. beloppet
f) Dela upp i två integraler pga. beloppet

L6.10

a) Substitution av inre funktion, insättningsformeln
b) Substitution av inre funktion, insättningsformeln
c) Substitution $x = t^3$, insättningsformeln
d) Förläng med $\cos x$, derivatans nämnare i täljaren, insättningsformeln

L6.11

a) Substitution av inre funktion och partiell integration
b) Substitution $y = \tan x$
c) Uppdelning i två integraler pga. beloppet
d) Uppdelning i två integraler pga. beloppet
e) Partiell integration
f) Substitution $y = \sin x$

L6.12

a) Krzysztofs formel
b) Krzysztofs formel

L6.3

b) Vad närmar sig $f(\xi)$?

L6.26

a) Partiell integration med faktorn 1

b) Substitution $y = e^x$
c) Substitution av inre funktion

L6.29 Skissa graf för att förstå problemet, Analysens huvudsats och sätt $f'(x) = 0$

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 5:

Ö7.69

a-l) Generaliseringen hävs, standardprimitiv, eventuellt divergens med sats 10.12

Ö7.70

a) Generaliseringen hävs, förlängning med e^x, substitution
b) Generaliseringen hävs och substitution
c) Generaliseringen hävs och anpassning till $\frac{d}{dx} \arctan x$
d) Generaliseringen hävs och derivatan av nämnaren i täljaren
e) Generaliseringen hävs och partiell integration
f) Generaliseringen hävs och partiell integration
g) Generaliseringen hävs och partiell integration
h) Generaliseringen hävs och substitution av $\ln x$
i) Generaliseringen hävs och standardprimitiv
j) Generaliseringen hävs och partialbråksuppdelning
k) Generaliseringen hävs och substitution av $\sqrt{x}$
l) Ta hänsyn till att integralen är generaliserad, substitution av $\sqrt{x}$ och anpassning till $\frac{d}{dx} \arcsin x$.

L6.23

a) Generaliseringen hävs, standardprimitiv alternativt visas divergent med sats 10.12
b) Generaliseringen hävs, partiell integration
c) Generaliseringen hävs, anpassning till $\frac{d}{dx} \arctan x$
d) Generaliseringen hävs, uppdelning i två integraler, anpassning till $\frac{d}{dx} \arctan x$ respektive ”derivatan av nämnaren i täljaren” – den senares divergens ev. med sats 10.12
e) Generaliseringen hävs, substitution av $1 - x$
f) Generaliseringen hävs, se Ö7.70 l)

L6.24

a) Generaliseringen hävs, partiell integration
b) Generaliseringen hävs, partiell integration och partialbråksuppdelning
c) Generaliseringen hävs, förlängning med e^x, substitution, partialbråksuppdelning, ev. divergens med Sats 10.12
d) Generaliseringen hävs och partialbråksuppdelning

L10.16

a) $\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int_1^\infty \frac{x^2}{x^4} \cdot \frac{\overbrace{1+1/x^2}^{\leq 2}}{\underbrace{1+1/x^4}_{>1}} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \cdot 2dx = \cdots$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x+\sin x}dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x+x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \cdots$

L10.17

a) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \cdots$

b) $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^3+1}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+1}dx + \int_1^\infty \frac{x^2\overbrace{(1+1/x^2)}^{>1}}{x^3\underbrace{(1+1/x^3)}_{\leq 2}}dx \geq \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+1}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}dx \ldots$

L6.25

a) Generaliseringen hävs, fundera över hur divergens undviks, ev. med Sats 10.12
b) Generaliseringen hävs, fundera över hur divergens undviks, ev. med Sats 10.12
c) Generaliseringen hävs med två integraler, fundera över hur divergens undviks, ev. med Sats 10.12
d) Substitution av $\ln x$, fundera över hur divergens undviks, ev. med Sats 10.12

L6.26

a) Partiell integration med faktorn 1
b) Substitution av e^x
c) Generaliseringen hävs med två integraler, substitution av $\sqrt{x}$
d) Symmetrin utnyttjas, Generaliseringen hävs, partiell integration

L6.30

a) Generaliseringen hävs, partiell integration med primitiv funktion av $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 6:

L7.1 Identifiera rötter och sedan över- och underfunktion – ställ sedan upp integral.

Ö7.18 Skissa begränsande linjer och kurva, identifiera rötter och sedan över- och underfunktion – ställ sedan upp integral.

Ö7.19 Skissa kurvor, identifiera rötter och sedan över- och underfunktion – ställ sedan upp integral.

Ö7.46 Ställ upp utrycket för bågelementet ds (generellt) och tillämpa det på funktionen.

Ö7.44 Ställ upp utrycket för bågelementet ds (generellt) – notera att x och y beror av t – och tillämpa det på funktionen.

L7.2 Skissa ellipsen, välj en fjärdedel av ytan (i första kvadranten) genom symmetri, lös ut y som en funktion av x och ställ upp integralen som löses med stöd av exempel 5.40 på sid 269.

L7.3 Fundera över kurvans utseende, ställ upp utrycket för arena av en sektor dA och lös integralen med hjälp av $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ eller Eulers formel (ex 5.34).

L7.4 Bestäm skärningspunkter, över- och underfunktion, ställ upp integralen

L7.6 Fundera över kurvans utseende, ställ upp utrycket för arena av en sektor dA och lös integralen.

L7.8 Ställ upp uttryck för bågelement på parameterform och integrera. I a) fås ett stort uttryck som kan förenklas kraftigt med hjälp av trigettan.

L7.9 Ställ upp uttryck för bågelement på polär form och integrera. Notera att då φ^2 bryts ut får man $|\varphi|$ och φ duger endast om man integrerar inom $[0, \pi]$ och dubblar svaret.

L7.10 Ställ gärna upp utrycket för bågelementet ds (generellt) och tillämpa det på funktionen, förenkling ger $ds = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ (nämnaren $1 - x^2$ för att få positivt tecken inom aktuellt intervall) som efter polynomdivision och PBU ger en enkel integral.

Ö7.48 Ställ upp integralen med hjälp av funktion på parameterform och Trigettan ger enkel lösning, alternativt övre halvan av enhetscirkelns ekvation som till slut, efter en del förenkling, ger en enkel integral.

L7.39

a) Partiell integration
b) Studera inversen

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 7:

Ö7.25 Identifiera rotationskroppen, ställ upp uttryck för en delvolym $dV = \pi\ 25x^2 dx$ och summera dessa med en integral.

Ö7.27 Identifiera rotationskroppen, ställ upp uttryck för en delvolym dV och summera dessa med en integral.

Ö7.26 Ställ upp uttryck för en delvolym $dV = \frac{x}{(x+1)^2}dx$ och summera dessa med en integral.

Ö7.30 Låt den räta linjen $y = \frac{R}{h}$ alstrar en liggande kon, mellan origo och $x = h$. Delvolymer $dV = \pi\left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx$ summeras längs x-axeln mellan $x = 0$ och $x = h$.

Ö7.35 Ställ upp uttryck för en delvolym $dV = y\,dy$ och summera dessa med en integral.

Ö7.36 Ställ upp uttryck för en delvolym $dV = 2\pi x \ln x\,dx$ och summera dessa med en integral.

Ö7.59 Volymen beräknas med delvolym $dV = \pi(x^3)^2$ medan arean beräknas med ytelement som har omkretsen $O = 2\pi x^3$ och bredden $ds = \sqrt{1 + (3x^2)^2}dx$

Ö7.61 Låt den räta linjen $y = \frac{R}{h}$ alstrar en liggande kon, mellan origo och $x = h$. Ytelementen har då omkretsen $O = 2\pi\frac{R}{h}x$ och bredden $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2}\,dx$. Arean fås genom integration längs x-axeln mellan $x = 0$ och $x = h$.

Ö7.73 Ledning i läroboken, se även sid 331 med jämförande integral

L7.25 Ytelementen har omkretsen $O = 2\pi x^3$ och bredden $ds = \sqrt{1 + (3x^2)^2}dx$.

L7.14
a) Runt y-axeln fås delvolymer av ”skivor” radien $y = \sin 2x$ och tjockleken dx – alltså $dV = \pi \sin^2 2x\,dx$

b) Runt y-axeln fås delvolymer av ”rör” med omkretsen (längden) $O = 2\pi x$, höjden $y = \sin 2x$ och tjockleken dx

L7.17 Ledning i läroboken

L7.26 Ytelementen har omkretsen $O = 2\pi x$ runt *y*-axeln och bredden $ds = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx$.

L7.36 Förskjutning så att området roterar runt y-axeln känns enklare. Volymen fås då genom ”rör” med omkretsen $O = 2\pi x$, höjden $y = \sin^2 x$ och tjockleken dx mellan $x = \pi$ och $x = 2\pi$.

L7.38 Volymen fås genom ”rör” med omkretsen $O = 2\pi(1 - x)$ runt linjen $x = 1$, höjden $y = \frac{x}{x^2+3x+2}$ och tjockleken dx mellan $x = 0$ och $x = 1$. Integralen löses med PBU.

Ledtrådar för lösning av uppgifter ur Krzysztof häfte efter föreläsning 8:

K1 Anpassa *c* så att integralen får värdet 1 alltså 100 %. Att $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$är ett krav om $f_X(x)$ ska bli en täthetsfunktion.

Vidare så fås $P(X > 0)$ med integralen $\int_0^\infty f_X(x)dx$

K2 Primitiva funktionen = fördelningsfunktionen, förutsatt att c anpassats. Notera att den är växande från 0 till 1. Notera att fördelningsfunktionen som alltid är växande från värdet 0 till 1. Dessutseende inom intervallet $x \in]-1, 1[$ fick man redan i föregående uppgift K1.

K3 Notera att det handlar om exponentialfunktionen överst på sid 4, alltså om

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & då\ x > 0 \\ 0 & då\ x \leq 0 \end{cases}$$

Den integreras med (önskvärda) och integralens värde blir 1, alltså 100 %, om $f_X(x)$ är en täthetsfunktion.

K4 Notera att i uppgiften ges *fördelningsfunktion* $F_X(x)$ och inte täthetsfunktion $f_X(x)$. Detta missar många. Variabeln x beräknas genom att sätta $F_X(x) = \alpha = 0.25$ och ur den ekvationen lösa ut det sökta x -värdet. Därefter samma sak men högerledet $\alpha = 0.50$, och $\alpha = 0.75$.

K5 Se definition 1. Krav 1 uppfyllt direkt. Krav 2 genom att täthetsfunktionen integreras över hela utfallsrummet och får värdet 1. Notera att två separata integraler krävs. När vi ”känner” på täthetsfunktion och integrerar upptäcker vi att $\int_{-\infty}^{0} \frac{3}{2} e^{3x} dx = \cdots = \frac{1}{2}$ samt att $\int_{o}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx = \cdots = \frac{1}{2}$. Därmed fick vi medianen av en slump. Alltså $x_{0.5} = 0$ som har halva integralen (ytans storlek) till vänster och andra halvan till höger.

Därmed bör $x_{0.25}$ återfinnas till vänster, då $x < 0$ medan $x_{0.75}$ bör finnas till höger, då $x > 0$.

$\int_{-\infty}^{b} \frac{3}{2} e^{3x} dx = 0.25$ ger $b = x_{0.25}$ och $0.5 + \underbrace{\int_0^b \frac{1}{2} e^{-x} dx}_{=0.25} = 0.75$ ger $b = x_{0.75}$.

K8 Metod I) Fördelningsfunktionen bestäms till $F(x) = -e^{-x^2} + 1$ genom att $C = 1$ har valts så att $F(x)$ uppfyller Sats 7 punkt 1. Genom att $F(x) = \alpha$ får man α-kvantil då man löser ut x. Ersätter man α med 0.5, 0.9 respektive 0.99 får tillhörande kvantiler på samma sätt.

Metod II) Integration av frekvensfunktionen från 0 till okända högergränsen (= sökta kvantilen) b med givet svar 0.5, 0.9 respektive 0.99. Sökta kvantiler fås genom att lösa ut den okända högergränsen b.

K9 Enligt Definition 14 fås väntevärdet genom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = E(X)$$

Enligt 5 Appendix fås väntevärdet för kvadraterna av den stokastiska variabeln X genom:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

I denna uppgift gäller alltså att

$$E(X) = \int_0^a x \frac{2}{a^2} x\, dx = \cdots = \frac{2}{3} a$$

och

$$E(X^2) = \int_0^a x^2 \frac{2}{a^2} x\, dx = \cdots = \frac{1}{2} a^2$$

Enligt Sats 20 gäller att variansen kan beräknas enligt:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

som med hjälp av integralerna ovan ger det värdet.

K10

a) Integrera först fram väntevärdet

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \cdots = \int_0^1 x\, 2x\, dx = \cdots = \frac{2}{3}$$

samt

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx = \cdots = \int_0^1 x^2\, 2x\, dx = \cdots = \frac{1}{2}$$

Variansen beräknas enligt Sats 20 och kvadratroten ger sedan standardavvikelsen.

b) Sökt är $P\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}} < X < \frac{2}{3} + 2\frac{1}{\sqrt{18}}\right)$ som fås genom integration men tänk på att inte integrera utanför intervallet $\in [0, 1]$, vilket lätt görs då högergränsen $2\frac{1}{\sqrt{18}} > 1$.

c) Sökt är $P\left(\frac{2}{3} - 2\frac{1}{\sqrt{18}} < X < \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$ som fås genom integration och i detta fall ryms integrationsgränserna inom $x \in [0, 1]$.

K6 Skissa den alltid växande $F_X(x)$. En bra figur är nödvändigt för förståelsen i denna uppgift. Notera nu att $F_X(x)$ bara är högerkontinuerlig i $x = 1$ vilket räcker.

Sätt $F_X(x) = \frac{5}{3}$ samt $1 - F_X(x) = \frac{3}{2}$ och sedan differensen mellan gränserna $F_X(x) = \frac{5}{3}$ och $F_X(x) = \frac{4}{3}$. För $P(X = 1)$ så hade svaret blivit detsamma för $P(X \leq 1)$.

K7 Insättning av värden i fördelningsfunktionen, i vissa fall subtraktion

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 9:

Ö9.7a) Ledande frågor: Runt viket x -värde skall polynomet approximera den ordinarie funktionen? Är det frågan om ett Maclaurinpolynom? Hur många gånger måste den ordinarie funktionen deriveras för att angiven grad hos polynomet skall erhållas? Hur ser formeln ut som används för att ställa upp polynomet?

Ö9.3 Taylors formel runt $x = 0$ ger givetvis samma resultat som Maclaurin…

Ö9.4 Taylors formel

Ö9.5 Taylors formel

Ö9.2 Att ersätta ett polynom med ett annat polynom kanske kan kännas märkligt. Finns det något att vinna på detta? Runt $x = 0$ visar sig Maclaurinpolynomet växa fram med samma termer som det ordinarie polynomet men bara till och med angiven grad – helt rimligt inser man med tanke på att termer med låg grad helt och hållet dominerar runt $x = 0$. Maclaurinpolynomet är ju en approximation runt $x = 0$.

Runt andra x-värden såsom $x = a$ tar man till Taylorpolynom och varje term innehåller just avvikelsen $x - a$, av olika grad.

L8.2 Maclaurins formel, nu med restterm

L8.3 Taylors formel, med restterm

L8.4 Använd Maclaurins formel och försök att se mönster under utvecklingen.

L8.5 Använd Maclaurins formel.

L8.6 Använd Maclaurins formel.

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 10:

Ö9.8

a) När Maclaurinpolynomet tas fram deriveras $\sin 3x$ fem gånger

b) Maclaurinpolynomet för $\sin t$ tas fram och t ersätts sedan med $3x$.

Ö9.9

a) Maclaurinpolynomet för e^x tas fram och multipliceras $1 + x$ – se ledning i facit.

b) Maclaurinpolynomet för $\sin x$ tas fram och multipliceras x.

c) Maclaurinpolynomet för e^t tas fram och t ersätts sedan med x^2. Polynomet multipliceras sedan med motsvarande för $\sin x$.

d) Använd utvecklingen för $\arctan x$ på sid. 360.

Ö9.10

a) Maclaurinpolynomet för $\ln(1 + t)$ tas fram och t ersätts sedan med $1 + 2x^2$.

b) Maclaurinpolynomet för $\frac{1}{\sqrt{1+t}}$ tas fram (se Sats 8.3 e) och t ersätts sedan med $-2x$.

c) Maclaurinpolynomet för e^t tas fram och t ersätts sedan med Maclaurinpolynomet för $\sin x$.

d) Maclaurinpolynomet för $\arctan x$ tas fram sedan deriveras båda leden.

Ö9.12 a–d) Alla elementära funktioner som inte är polynom ersättas med Maclaurinpolynom och gränsvärdet kan då kontrolleras. Kontrollera gärna med l'Hospitals regel.

L8.8 a) Maclaurinutveckling av faktorerna separat, multiplicera sedan dessa, både polynomen och resttermerna.

b) Utveckla $(1 + t)^{\frac{1}{2}}$ och $\arctan x$ seprat. Ersätt sedan t med tvecklingen av $\arctan x$

L8.9 a) Utveckla e^x och $(1 + t)^{\frac{1}{2}}$. Ersätt sedan t med $2x$.

b) Utveckla $\arctan x$ och gör sedan liknämnigt.

L8.10 Utveckla e^u och $\cos v$. Ersätt sedan u med ax samt v med $\sqrt{x}$.

L8.11 Skriv sedan om utrycket till $x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Utveckla $\ln(1 + u)$ och ersätt u med $\frac{1}{x}$ osv.

L8.13 Utveckla $\cos x$ och $\arctan x$. Multiplicera sedan den första med 2 och kvadrera den andra utvecklingen. Gör sedan en studie av den dominerande termen.

L8.14 a) Utveckla e^u och $\sin x$. Ersätt sedan u med utvecklingen av $\sin x$

b) Som ovan men med $\cos x$ – notera att alla termer innehåller termer av grad noll

Ö9.11 Utveckla $\sin v$. Ersätt sedan v med $2x^2$ och polynomdividera med $x + 1$.

Ö9.21 Utveckla täljaren och anpassa a och b så att gränsvärde existerar (det blir $5/2$). Detta styr sedan c.

L8.23 Utveckla $\sin x$ och $\ln x$ separat. Sätt sedan in $1 + \sin x$ i den yttre utvecklingen.

L8.25 Maclaurin- eller Taylorutveckla och förenkla

L8.27 Maclaurinutveckla och förenkla

L8.29 Maclaurinutveckla och derivera sedan polynomet ett respektive två steg.

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 11:

L9.2 a-c) Derivera och sätt in

L9.3 Derivera och sätt in. Anpassa sedan konstanten så att kravet uppfylls.

Ö8.2 Lös först ut y' (om detta inte är gjort) och bestäm den primitiva funktionen y. Anpassa sedan konstanten C så att kravet uppfylls.

Ö8.3 Eftersom att lösningarna blir $y = x^2 + C$ skissas ex. $y = x^2 - 1$, $y = x^2$, $y = x^2 + 1$ samt just den lösning som innehåller angiven punkt tack vare $C = 3$.

Ö8.4 a) Primitiv funktion och anpassning av konstanten C.

b) Lös först ut y', bestäm den primitiva funktionen som faktiskt är en standardprimitiv. Anpassning av C därefter.

c) Lös först ut y' och bestäm den primitiva funktionen. Anpassning av C därefter.

Ö8.12 a-c) Ersätt y' med $\frac{dy}{dx}$ och separera sedan variablerna. Integrera i båda leden och lös till sist ut y.

d) Multiplicera med x i båda leden och inse att vänsterledet är derivata av produkt enligt $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$. Integrera i båda leden och lös ut y.

e) Multiplicera med $\sin x$ i båda leden och inse att vänsterledet är derivata av produkt enligt $\frac{d}{dx}(y \sin x\,) = y' \sin x + y \cos x$. Integrera i båda leden. Högerledet enligt $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} + C$. Division med $\sin x$ ger sedan y.

f) I denna uppgift krävs först division med x i båda leden. Sedan multiplikation med en integrerande faktor $e^{\frac{x^2}{2}}$ så att vänsterledet bildar en derivata av produkt enligt $\frac{d}{dx}\left(ye^{\frac{x^2}{2}}\right) = \left(y'e^{\frac{x^2}{2}} + yxe^{\frac{x^2}{2}}\right)$. Högerledet $HL = xe^{\frac{x^2}{2}}$. Integrering av båda leden ger $ye^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} + C$. Till sist löses y ut genom division med $e^{\frac{x^2}{2}}$ och villkoret ger $C = 1$.

g) Multiplikation med en integrerande faktor e^{x+x^2} och vänsterledet bildar en derivata av produkt – i detta fall $VL = \frac{d}{dx}\left(ye^{x+x^2}\right) = \left(y'e^{x+x^2} + y(1+2x)e^{x+x^2}\right)$. Högerledet förenklas enligt $e^{x+x^2}e^{-x^2} = e^x$. Leden integreras och y löses ut.

h) Variablerna separeras och man får $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x^2}dx$. Genom att integrera båda leden kan sedan y lösas ut.

i) Vänsterledet är från början en derivata av produkt enligt $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$. Genom att integrera båda leden kan y lösas ut och villkoret ger till sist $C = 1$.

Ö8.24 a-f) Separera variabler och integrera i båda leden. Fundera sedan över lösningens definitionsmängd – alltså tillåtna x-värden.

Ö8.25 Separera variabler och integrera i båda leden. Anpassa sedan konstanten.

L9.5 a) Metod 1: Skriv ekvationen på normalform. Med hjälp av en integrerande faktor $e^{\frac{x}{4}}$ skrivs vänsterledet som en derivata av produkt, integrera och lös ut y.

Metod 2: Separera variablerna och integrera i båda leden.

Metod 3: (Från Matematik E) Ansats $y = Ce^{rx}$ ger karaktäristisk ekvation $r + \frac{1}{4} = 0$ som ger den homogena ekvationens lösning $y = Ce^{-\frac{x}{4}}$

b) Metod 1: Skriv ekvationen på normalform. Med hjälp av en integrerande faktor $e^{-\arctan x}$ skrivs vänsterledet som en derivata av produkt, integrera och lös ut y.

Metod 2: Separera variablerna och integrera i båda leden.

c) Metod 1: Ekvationen är redan skriven på normalform. Med hjälp av integrerande faktor e^{-2x} skrivs vänsterledet som en derivata av produkt, integrera och lös ut y.

Metod 2: (från Matematik E) Den homogena ekvationen löses genom att man sätter HL = 0, ansats $y_h = Ce^{rx}$ ger karaktäristisk ekvation $r - 2 = 0$ som ger den homogena ekvationens lösning $y_h = Ce^{2x}$. Vidare så görs ansatsen $y_p = Ax + B$ och $y_p{}' = A$ baserad på att högerledets och vänsterledets utseende. Insättning ger den partikulära lösningen $y_p = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ som tillsammans med $y_h = Ce^{2x}$ ger lösningen $y = Ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

d) Ekvationen är redan skriven i normalform. Med hjälp av en integrerande faktor e^{x+x^2} skrivs vänsterledet som en derivata av produkt. Integrera båda leden och lös ut y.

L9.6 Skriv ekvationen på normalform enligt $y' + \frac{10}{x}y = \frac{\ln x}{x}$. Med hjälp av en integrerande faktor $e^{10\ln x} = e^{\ln x^{10}} = x^{10}$ skrivs vänsterledet som en derivata av produkt, integrera och lös ut $y = \frac{1}{10}\ln x - \frac{1}{100} + \frac{C}{x^{10}}$. Villkoret ger sedan $C = \frac{1}{100}$

L9.13 a-c) Separera variablerna, integrera och lös ut y.

L9.15 Separera variablerna, integrera och lös ut y. Villkoret ger $C = 1$.
Lösningen $y = \ln\underbrace{(1 + \arctan x)}_{>0}$ kräver att $\arctan x > -1$ vilket sedan ger definitionsmängden.

Ö8.15 Separera variablerna. Skriv om VL som derivata av produkt med hjälp av en integrerande faktor $e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$ och erhåll $\frac{d}{dx}(x^2y) = x\cos x$. Integrera bådaleden (partiell integration i HL) och därefter division för att lösa ut y.

L9.4a Se föreläsningen

L9.16 a) För $x > 0$ får man:

$$x\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{x}dx$$

Partialbråksuppdelning ger:

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right)dy = \int\frac{1}{x}dx$$

Båda leden integreras:

$$\Leftrightarrow \ln(1+y) - \ln(1-y) = 2\ln x + C$$

Villkoret $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ ger $C = \ln 2$ och

$$\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln x^2 + \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln 2x^2 \Leftrightarrow \frac{1+y}{1-y} = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} = -2x^2 \Leftrightarrow \frac{y-1+2}{y-1} = -2x^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{y-1} = -2x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y-1} = -1 - 2x^2 \Leftrightarrow \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{1+2x^2} \Leftrightarrow y = 1 + \frac{-2}{1+2x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1+2x^2}{1+2x^2} + \frac{-2}{2x^2+1} \Leftrightarrow y = \frac{2x^2-1}{2x^2+1}$$

b) $\begin{cases} x\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ger att $\frac{dy}{dx} = 0$ och $y = C = 1$

L9.9 Skriv ekvationen på normalform. Med en integrerande faktor

$e^{-\ln(1+x^2)} = e^{\ln(1+x^2)^{-1}} = (1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}$ kan VL bilda en derivata av produkt. Integration (partiell integration i HL) följt, anpassning av konstanten och multiplikation med $1+x^2$ ger y.

L9.48 Separera variablerna (för $y \neq 0$), integrera (partiell integration krävs i HL) och lös ut y. Glöm inte att $y=0$ faktiskt också är en lösning på ekvationen.

L9.49 Skriv ekvationen på normalform och hitta en integrerande faktor

$e^{2\ln(-\cos x)} = e^{\ln(\cos x)^2} = (1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}$. Integration (partiell integration i HL), anpassning av konstanten och multiplikation med $1+x^2$ ger y.

L9.17 Separera variablerna och PBU i VL ger ekvationen $\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{a-y}+\frac{1}{b-y}\right)dy = kdt$.

Integrera i båda leden och villkoret ger $C = \ln\frac{a}{b}$. Därefter löses y ut.

L9.51 Skriv ekvationen på normalform. Multiplikation med en integrerande faktor $e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2$ ger derivata av produkt i VL. Integrera och villkoret ger $C=1$. Därefter löses y ut.

Ö8.14 a) Dividera båda leden med $(1+x^4)^2$ så att man får

$$\frac{1}{1+x^4}y' - \frac{4x^3}{(1+x^4)^2}y = \frac{x^7}{(1+x^4)^2}$$

med ett vänsterled som är derivata av produkt enligt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^4}y\right) = \frac{x^7}{(1+x^4)^2}$$

Integrera i båda leden och lös högerledet enligt:

$$\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx = \begin{bmatrix} t = x^4 \\ \dfrac{dt}{dx} = 4x^3 \\ \dfrac{1}{4}dt = x^3 dx \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \overbrace{\frac{1}{(1+t)^2}}^{\uparrow}\underbrace{t}_{\downarrow}\,dt = \cdots$$

Man får nu ett uttryck ur vilket y kan lösas ut:

$$\frac{1}{1+x^4}y = -\frac{1}{4}\frac{x^4}{1+x^4} + \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

Ledtrådar för lösning av uppgifter efter föreläsning 12:

Ö8.37	Lösningstips på sid 70
Ö8.38 a-d)	Bestäm och lös karaktäristisk ekvation och tag sedan hänsyn till begynnelsevillkoren när konstanterna bestäms.
L9.21	Karaktäristiska ekvation ställs upp. Om man är ambitiös gör man det genom ansats med $y = Ce^{rx}$samt åtföljande $y' = Cre^{rx}$ och $y'' = Cr^2e^{rx}$. Detta ger den karaktäristiska ekvationen och y kan bestämmas. Konstanterna fås med hjälp av begynnelsevillkoren.
Ö8.39	a-c) Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1. Ytterligare ledning på sid 70 i häftet.
Ö8.40	a-c) Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1. Ytterligare ledning på sid 70 i häftet.
Ö8.41	Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1.
L9.23	a-c) Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1. Ytterligare ledning på sid 536 i läroboken.
Ö8.42	Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1.
Ö8.43	Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1.
L9.26	Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1. Begynnelsevillkoren möjliggör bestämning av konstanterna.
L9.27	Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1. Gränsvärdet och sedan begynnelsevillkoret möjliggör bestämning av konstanterna.
L9.29	Ekvationen är homogen. Den karaktäristiska ekvationen ger rent imaginära rötter och begynnelsevillkoren hjälper sedan att bestämma konstanterna.
L9.22	Ekvationen är homogen. Den karaktäristiska ekvationen ger rent imaginära rötter och begynnelsevillkoren hjälper sedan att bestämma konstanterna.

L9.24 Lämplig ansats och *en* lösning y_p bestäms. Till denna kompletterar man med homogena ekvationens lösningar och får den allmänna lösningen – se Sats 9.1. Gränsvärdet och sedan begynnelsevillkoret möjliggör bestämning av konstanterna.

L9.50 Ekvationen är homogen. Den karaktäristiska ekvationen ger komplexa rötter och villkoret hjälper sedan att bestämma konstanterna.

L9.52 Ekvationen är homogen. Den karaktäristiska ekvationen ger komplexa rötter och villkoret hjälper sedan att bestämma konstanterna.