Teorifrågor kap. 5.2–9.3

Repetition

1) Härled formeln för partiell integration ur nedanstående samband:

$$\frac{d}{dx}F(x)g(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

2) Vilken typ av elementär funktion brukar man oftast välja att derivera – alltså välja som $g(x)$ nedan – vid partiell integration?

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

3) Ibland är det praktiskt att införa faktorn 1 vid partiell integration. I vilka fall?

4) Hur löser man integraler som har ”nämnarens derivata i täljaren”, t.ex. hos:

$$\int \tan x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \cdots$$

Integrationsmetoder – variabelsubstitution och hantering av rationella uttryck

5) Kedjeregeln baklänges med hjälp av substitution
Vi ska bestämma

$$\int \cos(x^2)\, 2x \, dx$$

Låt oss kalla $y = g(x) = x^2$ för den inre funktionen, $g'(x) = 2x$ för den *inre funktionens derivata* och $f\big(g(x)\big) = f(y) = \cos(y)$ för den *yttre* funktionen

Variabelbyte är i detta fall en smart lösningstaktik, då den *inre funktionens derivata* återfinns som en *faktor* intill den yttre funktionen.

Efter variabelskifte $\begin{bmatrix} y = x^2 \\ \frac{dy}{dx} = 2x \\ dy = 2x\, dx \end{bmatrix}$ får man betydligt enklare:

$$\int \cos y \, dy$$

Hitta på ytterligare några exempel som lämpar sig särskilt bra att lösa med hjälp av variabelbyte.

6) Vid partialbråksuppdelning skriver man om rationella uttryck, till flera men enklare sådana, vilka förhoppningsvis är enklare att finna primitiv funktion till. Efter lämplig ansats finns i huvudsak två standardmetoder för att finna partialbråken. Vilka två?

7) Nedanstående ansats…

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4}$$

…kan skrivas om enligt:

- *A* som fri term

$$\frac{1}{x+4} = A + \frac{B(x+2)}{x+4}$$

- *B* som fri term

$$\frac{1}{x+2} = \frac{A(x+4)}{x+2} + B$$

Om man på ett smart sätt väljer värde på x så kan *A* respektive *B* bestämmas. Hur?

8) När man bestämmer primitiv funktion till en integrand som är ett rationellt uttryck kan partialbråksuppdelning eller polynomdivision vara en lämplig start.

Para ihop integrand (a–j) med förslag på start (I–X):

a) $\frac{5x+2}{(x+2)(x+5)}$

b) $\frac{x^3+2}{(x+2)(x+5)}$

c) $\frac{3x-7}{(x^2+2)(x+2)}$

d) $\frac{x+4}{(x+2)^2(x+5)}$

e) $\frac{x^2+9}{(x+2)(x+5)}$

f) $\frac{x^2+3x+5}{(x^2+2)(x+2)^2}$

g) $\frac{12}{(x+2)^3(x+5)}$

h) $\frac{x+5}{(x^2+4x+4)(x+5)}$

i) $\frac{48}{(x^3+6x^2+12x+8)(x+5)}$

j) $\frac{5x-3}{(x^2+4x+4)(x^2+10x+25)}$

I. Ansats: $\frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$

II. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+5}$

III. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+5}$

IV. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+5}$

V. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{D}{x+5}$

VI. Ansats: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{D}{x+5}$

VII. Ansats: $\frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x+2}$

VIII. $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2}$

IX. Polynomdivision först…

X. Polynomdivision först…

9) Nedanstående två omskrivningar kan kännas långsökta men är ändå intressanta. Varför?

a)

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \int \frac{\frac{1}{9}}{\frac{x^2}{9}+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx \ldots$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx \ldots$$

Integration av trigonometriska uttryck och rottuttryck

10) Snarlika integrander som innehåller trigonometriska uttryck kan kräva väldigt olika taktik när man vill finna deras primitiva funktioner. Para ihop (a–h) med en lämplig taktik (I – VIII):

a) $\int \cos x\,dx$

b) $\int \cos^2 x\,dx$

c) $\int \cos^3 x\,dx$

d) $\int \cos^4 x\,dx$

e) $\int \cos^5 x\,dx$

f) $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

g) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

h) $\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$

I. Taktik: Förlängning med $\cos x$, ”trigettan”, variabelbyte och partialbråksuppdelning

II. Taktik: Direkt primitiv funktion

III. Taktik: ”Trigformel dubbla vinkeln”…

IV. Taktik: ”Trigettan” och variabelbyte…

V. Taktik: ”Trigformel dubbla vinkeln” två ggr eller Eulers formel + de Moivres formel…

VI. Taktik: ”Trigettan” och variabelbyte…

VII. Taktik: Förlängning med $\cos x$, ”trigettan”, variabelbyte och partialbråksuppdelning…

VIII. Taktik: Direkt primitiv funktion

11) I uppgift Ö6.24 (b) ska man beräkna $\int \frac{4}{5+4\sin x}dx$.
Till hjälp finner man exempel 5.35 på sid 265 i läroboken, med det till synes långsökta variabelbytet $y = \tan\frac{x}{2}$. Undersök hur variabelbytet dessutom ger:

a) $\frac{2dy}{1+y^2} = dx$ b) $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ c) $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$

12) Vid integration med funktioner innehållande trigonometriska uttryck, kan man med fördel leta efter *inre funktioner* och särskilt *inre derivator*. Detta för att man, med ett väl valt variabelbyte, ska erhålla en integral som är enklare att lösa.

Studera följande:

$$\int 2e^{\sin^2 x} \sin x \cos x \, dx$$

Ovan kan man med fördel välja variabelbytet $y = \sin^2 x$ baserat på den inre funktionen.

Fullfölj variabelbytet genom att bl.a. bestämma den inre derivatan $\frac{dy}{dx}$ och upptäck att man erhåller klart enklare:

$$\int e^y \, dy$$

13) Repetera standardprimitiverna (g–k) i sats 5.2 på sid 239 i läroboken.

14) Studera de två lösningarna nedan, för beräkning av $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Båda metoderna är viktiga att behärska.

a) Lösningsmetod hämtad från föreläsning 1:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{bmatrix} y = 1 - x^2 \\ \frac{dy}{dx} = -2x \\ -dy = 2x\, dx \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

$$-2\sqrt{y} + C = -2\sqrt{1-x^2} + C$$

b) Lösningsmetod hämtad föreläsning 2:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{bmatrix} x = \sin y \\ \frac{dx}{dy} = \cos y \\ dx = \cos y\, dy \end{bmatrix} = \int \frac{2 \sin y \cos y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} dy$$

$$= \int \frac{2 \sin y \cos y}{\cos y} dy = \int 2 \sin y \, dy = -2\cos y + C$$

$$= -2\sqrt{1 - \sin^2 y} + C = -2\sqrt{1-x^2} + C$$

Bestämda integraler

15) Förklara begreppen:

a) Undertrappa
b) Övertrappa
c) Undersumma
d) Översumma

16) Låt funktionen f vara definierad på intervallet $[a, b]$. Vad gäller för ”differensen mellan undersumma och översumma” om f skall vara integrerbar på detta intervall?

17) Om $f(x)$ är integrerbar då $x \in [a, b]$ så finns det exakt *ett* tal A sådant att följande olikhet alltid gäller:

$$undersumman = \int_a^b \Phi_n(x)dx \leq A \leq \int_a^b \Psi_n(x)dx = \ddot{o}versumman$$

Vad kallas talet A och hur betecknas det? Se sats 6.1.

18) Repetera räknelagarna (a-e) i sats 6.2.

19) Sats 6.3 räcker ej för att visa att integralen $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ existerar; funktionen är ej monoton inom detta intervall. Vilken räknelag ur sats 6.2 måste sats 6.3 kompletteras med?

Samband mellan integraler och derivator

20) Nämn en tillräcklig egenskap hos en funktion f för att den ska vara integrerbar på intervallet $[a, b]$ – se sats 6.4.

21) Komplettera Medelvärdessatsen för integraler (sats 6.5) med en förtydligande figur och visa även med figur hur diskontinuerliga funktioner ej är tillämpbara på denna sats.

22) Studera figur 6.9 tillhörande Analysens huvudsats (sats 6.7). Var i figuren finner man $S(x + h)$ respektive $S(x)$? Enbart differensen $S(x + h) - S(x)$ är markerad i figuren.

23) Det vackra beviset av Analysens huvudsats (Sats 6.7) innehåller hänvisningar till olika satser och definitioner vilka tidigare tagits upp. Slå upp dessa i läroboken och kontrollera att du förstår varje mellanled i denna del av beviset:

$$S'(x) = \begin{bmatrix} \text{Enligt derivatans} \\ \text{definition} \\ \text{Definition 4.1} \end{bmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(S(x+h) - S(x) \big)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Enligt definitionen} \\ \text{av } S(x) \text{ i inledningen} \\ \text{av aktuell sats} \end{bmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Enligt räknelag} \\ \text{6.2 (e) för} \\ \text{integraler} \end{bmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{bmatrix} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(\xi) \big((x+h) - x \big) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(\xi)\, h$$

$$= \lim_{h \to 0} f(\xi) = \begin{bmatrix} \text{Tack vare} \\ \text{instängning av } \xi \\ \text{mellan } x \text{ och } x+h \end{bmatrix} = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Tack vare att } f \\ \text{är kontinuerlig i } x \end{bmatrix} = f(x)$$

24) Vilka är förutsättningarna för att insättningsformeln (sats 6.8) ska gälla?

25) ”Krzysztofs formel” kallar vi denna formel

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f\big(\psi(x)\big)\psi'(x) - f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

med den kontinuerliga funktionen $f(t)$ samt deriverbara funktionerna $\psi(x)$ och $\varphi(x)$ som integrationsgränser. Denna formel är utförligare än formeln i Analysens huvudsats. På vilket sätt är denna formel extra kraftfull?

26) På vilket sätt skiljer sig förutsättningarna i sats 6.9 (Partiell integration) från tidigare sats 5.4?

27) Varför är integrationsgränserna α och β istället för *a* och *b* i högerledet i sats 6.10?

Generaliserade integraler

28) Sats 6.4 säger ”om en funktion är *kontinuerlig* på ett *slutet intervall* så är den *integrerbar* på detta intervall”; kontinuitet är ett tillräckligt villkor för integrerbarhet. På vilka två sätt utvidgas detta genom införandet av generaliserade integraler i definition 6.6 och 6.7?

29) En integrationsgräns $-\infty$ eller ∞ kan ej hanteras som ett tal med hjälp av Insättningsformeln. Hur kringgår man detta?

30) I vilka fall sägs en generaliserad integral vara divergent?

31) Ibland måste en generaliserad integral delas upp i två eller flera integraler för att lösas, såsom i Exempel 6.22 och 6.23. Varför?

32) I Exempel 6.22 löses bara en av de två erhållna integralerna. Varför?

33) I Exempel 6.23 löses bara två av de fyra erhållna integralerna, trots konvergens. Varför?

34) På vilket sätt använder man vanligtvis sats 10.11?

Area och kurvlängd

35) Visa med en figur och Pythagoras sats att för en funktion $y(x)$ gäller att delsträckan $ds = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$ samt ange hur hela kurvlängden s beräknas.

36)

a) Visa att längden av kurvan $y = x^2$ då $x \in [0,1]$ ges av $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$

b) Visa att längden av kurvan $y = \ln(\cos x)$ då $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ges av $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx$

c) Visa att längden av kurvan $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ då $x \in [1,2]$ ges av $\int_1^2 \left|4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right| dx$

37) Visa med en figur och Pythagoras sats att för parameterfunktioner $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ gäller att delsträckan $ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$ samt ange hur hela kurvlängden s beräknas.

38) Visa med en figur och Pythagoras sats att för en funktion polär funktion $r(\varphi)$ gäller att delsträckan $ds = \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}d\varphi$ samt ange hur hela kurvlängden s beräknas.

39) Visa med hjälp av *arean av en cirkelsektor* och en figur och att för en polär funktion $r(\varphi)$ gäller att delarean $dA = \frac{\left(r(\varphi)\right)^2}{2}d\varphi$ samt ange hur hela arean A beräknas.

40) I vilket sammanhang talas det om ”tak och golv” vi areaberäkning med hjälp av integraler?

Rotationskroppar

41) Låt en kon ha höjden h och radien r. Tag med hjälp av rotationskroppar fram formler för konens volym och mantelytans area.

42) Låt ett klot ha radien r. Tag med hjälp av rotationskroppar fram formler för klotets volym och klotytans area.

Intergraler och statistik

43) Vad är en täthetsfunktion (även kallad frekvensfunktion eller eng. density-function)? (se definition 1)

44) En fördelningsfunktion är alltid växande. Mellan vilka funktionsvärden och varför? (se definition 5, sats 6-7)

45) Varför använder man vanligtvis lilla x i beräkningarna när man har valt stora X för att beteckna en kontinuerlig stokastisk variabel?

46) Vad är en kvantil? (se definition 10)

47) Vad är övre, mellersta respektive nedre kvartilen? (se definition 11)

48) Ange någon likhet respektive skillnad mellan väntevärde och median.

49) Ange hur man utifrån en täthetsfunktion beräknar median respektive väntevärde för en kontinuerlig stokastisk variabel. (se definition 10 + 11 samt 14)

50) Vad är variansen ett mått på och hur beräknar man den för en kontinuerlig stokastisk variabel? (se definition 18 och sats 20)

51) Vad kallar man kvadratroten av variansen? (se K10 a)

52) Vi vet att

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \qquad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Visa att:

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Maclaurin- och Taylorutveckling

53) Nämn några användningsområden för Maclaurin- och Taylorutvecklingar.

54) Vad skiljer Maclaurin- och Taylorutvecklingar?

55) Skissa kurvor för Maclaurin-polynom av grad 0, 1, 2 och 3 för $f(x) = \sin x$. Iakttagelser?

56) Skissa kurvor för Maclaurin-polynom av grad 0, 2 och 4 för $f(x) = \cos x$. Iakttagelser?

Differentialekvationer av ordning 1

57) Vad kännetecknar en differentialekvation?

58) Vad är *ordningen* av en differentialekvation?

59) Vad är *lösningen* av en differentialekvation?

60) Vad är ett riktningsfält?

61) Hur tar man fram en *integrerande faktor*?

62) På vilken form kan en *1:a ordningens linjär differentialekvation* alltid skrivas? (9.4 sid 382)

63) På vilken form kan en *1:a ordningens separabel differentialekvation* alltid skrivas? (sid 387)

Differentialekvationer av ordning 2

64) Bland *2:a* ordningens differentialekvationer tar vi inom kursen bara upp de med *konstant koefficienter*. Vad innebär det?

65) Sats 9.1 säger att om man har funnit *en lösning* y_p till en differentialekvation *2:a ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter* – alltså en ekvation av typen $y'' + ay' + by = f(x)$ – så finner man *samtliga lösningar* genom att lägga till de man erhåller då man löser den __?__.

66) Om man testar en ansats $y = Ce^{rx}$(med åtföljande $y' = Cre^{rx}$ och $y'' = Cr^2e^{rx}$) i en *homogen 2:a ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter* – i detta fall $y'' + 4y' + 3y = 0$ – så kan man identifiera den s.k. karaktäristiska ekvationen som ger värden på r. Visa med hjälp av ansatsen att den i detta fall blir $r^2 + 4r + 3 = 0$.